目　录

第一章　相对性原理

§1-1. 相互作用的傳播速度

为了描述自然界中所發生的过程，必須有一个所謂參考系統。參考系統应理解为一个坐标系統，和固定在这个坐标系里的鐘，坐标系用来决定一个質点在空間的位置，鐘用来指示时間。

有这样一些參考系統，在其中，一个自由运动物体，即一个无外力作用于其上的运动物体，是以等速度行进的。这种參考系統叫做慣性系統。

如果两个參考系統彼此相对作匀速运动，而其中的一个又是慣性系統，那么，另外一个显然也是慣性系統（在这个系統中每一个自由运动也將是匀速直綫运动）。因此，我們可以有随便多少个相对作匀速运动的慣性系統。

实驗証明，所謂"相对性原理"是有效的。按照这个原理，所有的自然定律在所有慣性系統中都是一样的。換句話說，表示自然定律的各种方程对于由一个慣性系統到另一个慣性系統的时間与空間的各种变換来說是不变的。这就是說，描述自然界定律的方程，如用不同的慣性參考系統的坐标与时間写出来，將有同样的形式。

質点間的相互作用在普通力学中是用相互作用的位能来表示的，相互作用势能是相互作用的粒子的坐标的函数。很容易看出，这种描述相互作用的方式，包含着一个假定，即假定相互作用是瞬时傳播的。事实上，按照上面的說法，每一个粒子在某一瞬时受到

其他各粒子的作用力，仅与那些粒子在該瞬时的位置有关。在这些相互作用的粒子中，如果有一个粒子改变了位置，立刻就会影响到其他各粒子。

然而，实驗証明，瞬时的相互作用在自然界中是不存在的。因此，根据相互作用的瞬时傳播观念的力学，本身就含有某些不准确性。实际上，如果相互作用的物体中的一个發生任何变动，仅仅在某一段时間过了以后才能影响到其他物体。只是在这段时間以后，由于最初变动所引起的过程，才开始在第二个物体上發生。用这段时間除两个物体間的距离，就得到"相互作用的傳播速度"。

我們要注意，这种速度，严格地說，应該称为相互作用的最大傳播速度。这种速度仅仅决定某一物体的变动开始表現在第二个物体上所需要的时間間隔。显然，相互作用的最大傳播速度的存在，同时也就暗示着，在自然界中，物体运动的速度一般不可能大于这个速度。事实上，假若眞的有这种运动存在，那么我們就可以利用这个运动实現一个相互作用，其傳播速度比上面所說的最大傳播速度还要大。

从一个粒子向另一个粒子傳播的相互作用往往叫做"信号"，它由第一个粒子發出，将第一个粒子所經历的变化通知第二个粒子。我們以后称相互作用的傳播速度为"信号速度"。

値得注意的是，由相对性原理可以推断相互作用的傳播速度在所有慣性参考系統中都是一样的。因此，相互作用的傳播速度是一个普适常数。

以后我們将要証明，这个恒定速度就是光在眞空中的速度。我們通常用字母 c 来代表光速，而根据最近的測量，其值等于

$$c=2.99776\times10^{10}\ \text{厘米/秒}。\tag{1-1}$$

这个速度很高，就說明了經典力学实际上在大多数情况下是十分准确的。我們有机会遇着的各种速度通常都比光速小得多，

因之，我們假設光速为无限大，实际上并不影响結果的准确性。

把相对性原理同相互作用傳播速度的有限性联合起来就是爱因斯坦的相对性原理(爱因斯坦在 1905 年提出这个原理)，它不同于伽利略的相对性原理，伽利略的相对性原理是以相互作用的傳播速度是无限大为出發点的。

以爱因斯坦的相对性原理（以后我們通常簡称它为相对性原理)为基础的力学，称为相对性力学。在極限情形下，当运动物体的速度比光速小很多时，我們就可以略去傳播速度的有限性对于运动的影响。这样一来，相对性力学就变为普通的力学了，普通的力学是根据相互作用是瞬息傳播这一假定的；这种力学称为牛頓力学或經典力学。在相对性力学的公式中，在形式上使 $c\to\infty$，就可由相对性力学过渡到經典力学。

在經典力学中，距离已經是相对的，就是說，不同事件的空間关系与为描述所用的参考系統有关。所以，說两件不同时的事件發生在空間同一点上(或者更广泛一些，說两件不同时的事件發生在彼此間有一定离距的两点上)，只有当我們指明了我們所用的是那一种参考系統时才有意义。

反之，在經典力学中，时間是絕对的，換句話說，假定时間的特性与参考系統无关，对所有参考系統来說，时間只有一个。这就是說，假如对于某一个观察者来說，有两个現象是同时發生的，那么，对所有其他观察者来說，这两个現象也是同时發生的。总之，两个給定事件發生的时間間隔在一切参考系統中必須一样。

然而，很容易証明，絕对时間的观念是与爱因斯坦的相对性原理完全冲突的。为了說明这一点，我們只須回忆一下，在以絕对时間的观念为基础的經典力学中，如所周知的速度合成的法則是有效的。按照这个法則，复杂运动的合速度簡單地等于組成这个运动的各个速度的矢量和。这个法則既然是普遍适用的，就应該可以

应用于相互作用的傳播。由此可以推出，傳播速度在不同的慣性参考系統中必定是不同的，这就与相对性原理冲突了。但是，实驗完全証实了相对性原理。在1881年迈克尔孙首次測量的結果証明，光速与其傳播方向并无关系；然而，按照經典力学，光速在与地球运动方向相同的方向上，应該比在与地球运动方向相反的方向上为小。

因此，相对性原理导出一个結果，卽时間不是絕对的。在不同的参考系統中，时間所經过的間隔也是不同的。所以，两件不同的事件中間有一定的时間間隔这一句話，仅在肯定地指明了所应用的是那一种参考系統的情况下，才有意义可言。特别是，在某一个参考系統內同时發生的事件，对另一个参考系統来說并不是同时的。

为了弄清楚这个观念，我們先考慮下面的簡單例子。我們来研究两个慣性参考系統 K 及 K'，其坐标軸分别为 XYZ 及 $X'Y'Z'$，而 K' 則相对于 K 沿 X 和 X' 軸向右运动(圖1-1)。

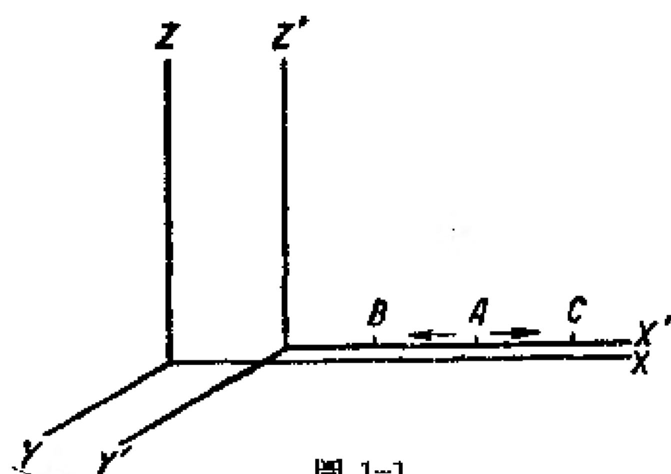


圖 1-1.

設信号从 X' 軸上某一点 A 向两个相反的方向發出。旣然信号在 K' 系統中的傳播速度，正如在所有慣性系統中一样，在两个方向上都等于 c，那么，它就会同时到达与 A 等距离的两点 B 及 C(在 K' 系統里)。但是，很显然地，同样的两事件(信号到达 B 及 C 两点)，对于在 K 系統內的观察者来說，絕不是同时的。实际上，按照相对性原理，信号相对于 K 系統的速度也等于 c，并且

因为B点对于K系統而言，是对着向它發出的信号移动，而C点则背离(由A向C發出的)信号移动，所以在K系統中，信号到达B点要比到达C点为早。

因此，爱因斯坦的相对性原理使基本物理觀念發生了極深刻的和根本的改变。由我們日常生活經驗所导出的空間和时間的观念，仅仅是近似的，因为我們日常生活所遇到的速度，都比光速小得多。

§ 1-2. 間隔

以后我們常常要用"事件"这一观念。一个"事件"是由其發生的地点及其發生的时間来决定的。因此，在某一粒子上所發生的事件可由粒子的三个坐标及事件發生的时間来决定。

为了表現便利起見，我們利用一个虛构的四度空間常常是有益的，在这个四度空間的四个軸上安置三个位标及一个时标。在这个空間內，事件可用一点来代表，这个点称为"世界点"。在这个虛构四度空間內，对于每一个粒子来說，都有一条綫，称为"世界綫"。这条綫上的各点决定粒子在所有时間的位标。很容易証明，与一个作匀速直綫运动的粒子相对应的世界綫是一条直綫。

現在我們用数学形式来表示光速不变原理。为此，我們考慮两个彼此以恒定的速度作相对运动的参考系統K及K'。这时我們选擇X軸与X'軸叠合，而Y和Z軸则分别与Y'和Z'軸平行，并以t和t'分别表示在K和K'参考系統內的时間。

設第一个事件是，从在K系統內的t_1时刻具有坐标x_1, y_1, z_1(在同一系統中)的点以光速向外傳播的信号。我們就在K系統內观察这个信号的傳播。再設第二个事件是，信号在t_2时刻，到达点x_2, y_2, z_2。信号傳播的速度既然是c，所以它所經过的距离就是$c(t_2-t_1)$。另一方面，这同一个距离又等于$[(x_2-x_1)^2+(y_2-$

$-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$。因此，我們可以写出$K$系統内两个事件的坐标的如下关系：

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-c^2(t_2-t_1)^2=0. \quad (1\text{-}2)$$

同样两个事件，即信号的傳播，也可以在K'系統内观察到。

設第一个事件在K'内的坐标为x_1', y_1', z_1', t_1'，而第二个事件則为x_2', y_2', z_2', t_2'。按照光速不变的原理，信号傳播的速度在K'系統内与在K系統内相同，所以我們得到与(1-2)式相似的方程

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2-c^2(t_2'-t_1')^2=0. \quad (1\text{-}3)$$

假如x_1, y_1, z_1, t_1及x_2, y_2, z_2, t_2是任何两个事件的坐标，則

$$s_{12}=[c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (1\text{-}4)$$

称为这两个事件的間隔。

因此，由光速不变的原理，我們可以断定，假如两个事件的間隔在某一个坐标系統内为零，那么，它在所有其他系統内均为零。

如果两个事件彼此无限地接近，那么，其間隔ds将滿足下面的方程：

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \quad (1\text{-}5)$$

为了数学上的便利，即为了使我們的方程具有更对称的形式起見，我們以后将常常用另外一个变数τ来代替t，联系τ与t的关系式是

$$\tau=ict. \quad (1\text{-}6)$$

这样一来，

$$s_{12}^2=-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(\tau_2-\tau_1)^2], \quad (1\text{-}7)$$

$$ds^2=-(dx^2+dy^2+dz^2+d\tau^2). \quad (1\text{-}8)$$

按照上面的推导，我們在虚构的四度空間的軸上将不安置x, y, z, t，而安置x, y, z, τ。很容易看出，$-s_{12}^2$可以解釋为在这个空間的两点x_1, y_1, z_1, τ_1及x_2, y_2, z_2, τ_2的距离的平方，而$-ds^2$可以

解釋为綫元的平方①。

上面已經証明，如果 ds 在某一慣性系統內为零，則 ds' 在另一系統內也是零。此外，ds 与 ds' 为同阶的两个无穷小量。由以上两个情况可以得出結論，ds 与 ds' 彼此必須成比例：

$$ds=a\,ds',$$

而且其中系数 a 仅与两个慣性系統的相对速度的絕对值有关。系数 a 不可能与位标或时間有关系，否則，空間的不同点及时間的不同时刻就不等价了，这是与时間及空間的均匀性相矛盾的。系数 a 也不可能与慣性系統的相对速度的方向有关，因为这就与空間的各向同性的性質相矛盾了。由于第一系統对于第二系統的相对运动的速度显然与第二系統对于第一系統的相对运动的速度相同，因此，根据写 $ds=a\,ds'$ 的同样理由，我們也可以写

$$ds'=a\,ds。$$

将 $ds=a\,ds'$ 代入 $ds'=a\,ds$，則得 $a^2=1$，即 $a=\pm 1$。为了从两个值中选擇一个，我們应注意，a 只可以永远等于 $+1$，或永远等于 -1。假如 $a(v)$ 眞的对于某些速度为 $+1$，而对于另外某些速度为 -1，那么，就一定有些速度存在，与这些速度相应的 $a(v)$ 是在 $+1$ 与 -1 之間，而这是不可能的。既然如此，那么 a 就应該永远为 $+1$，因为恒等式 $ds'=ds$ 是变換式 $ds'=a\,ds$ 的一个特例，其中 $a=+1$。由 $ds'=ds$ 直接可得，对有限間隔来說，$s'=s$。

因此，我們得到一个很重要的結論：两个事件的間隔在所有慣性参考系統里都是一样的，即当由一个慣性参考系統变換到任何另一个慣性参考系統时，它是不变的。这种不变式也就是光速不变的数学表示。

再次假設 x_1, y_1, z_1, t_1 及 x_2, y_2, z_2, t_2 是在某一个参考系統 K

---

① 由二次式 (1-5) 或 (1-8) 所决定的四度几何，是明考夫斯基因相对論而介紹的。

内的两个事件的坐标。我們要問，是否有一个参考系統 K' 存在，在其中两个事件在同一空間点發生？

我們采用下面的符号：

$$t_2-t_1=t_{12}, \quad (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=l_{12}^2.$$

于是，在 K 系統內，事件与事件之間的間隔是：

$$s_{12}^2=c^2t_{12}^2-l_{12}^2,$$

而在 K' 系統內則是：

$$s_{12}'^2=c^2t_{12}'^2-l_{12}'^2,$$

并且因为間隔是不变式，所以

$$c^2t_{12}^2-l_{12}^2=c^2t_{12}'^2-l_{12}'^2.$$

我們要求两个事件在 K' 系統中的同一点發生，即要求 $l_{12}'=0$。这时

$$s_{12}^2=c^2t_{12}^2-l_{12}^2=c^2t_{12}'^2>0.$$

因之，如果 $s_{12}^2>0$，即如果两个事件的間隔是实数的話，則具有我們所要求的特性的参考系統是存在的。实数間隔称为类时間隔。

因此，若两个事件的間隔是类时的，那么就有这样一个参考系統存在，在其中两个事件發生于同一地点。在这个系統內，这两个事件的时間間隔等于

$$t_{12}'=\frac{1}{c}\sqrt{c^2t_{12}^2-l_{12}^2}=\frac{s_{12}}{c}. \tag{1-9}$$

若任何两个事件在同一物体上發生，那么，它們的間隔将永为类时的。事实上，因为物体运动的速度不可能大于 c，所以在两个事件之間，物体所行走的距离不可能大于 ct_{12}，因此我們永远有

$$l_{12}<ct_{12}.$$

現在我們再問，我們能否找到一个参考系統，在其中，两个事件会同时發生。同上面一样，我們在 K 及 K' 两个系統中有 $c^2t_{12}^2-l_{12}^2=c^2t_{12}'^2-l_{12}'^2$。我們要求 $t_{12}'=0$，从而

$$s_{12}^{2}=-l_{12}'^{2}<0.$$

因之，仅当两个事件的間隔是虛数的情况时，我們才可以找到所要求的参考系統。虛数間隔称为类空間隔。

因此，若两个事件的間隔是类空的，那么就有一个参考系統存在，在其中，两个事件同时發生。在这个系統中發生这两个事件的两点間的距离等于

$$l_{12}'=\sqrt{l_{12}^{2}-c^{2}t_{12}^{2}}=is_{12}. \qquad (1\text{-}10)$$

将間隔分为类空間隔及类时間隔是一个絕对觀念，因为間隔是不变式。这就是說，一个間隔的类空性或类时性与参考系統无关。

取某一个事件 O 作为时間及空間坐标的計算起点。換句話說，其軸上安置 x, y, z, t 的四度坐标系統中，事件 O 的世界点就是坐标的原点。現在我們来研究所有其他事件对于本事件的关系。为了明显起見，我們只考慮一度空間与时間，并将它們安置在圖1-2的两个軸上。一个当 $t=0$ 时經过 $x=0$ 一点粒子的匀速直綫运动，可以用一条直綫来代表，这条直綫經过 O 点，与 t 軸成一角，此角的正切等于粒子的速度。因为最大可能的速度是 c，所以这条直綫与 t 軸所成之角也有一个最大值。圖1-2中有两条直綫，代表两个信号經过事件 O（即当 $t=0$ 时經过 $x=0$）以光速向相反两个方向的傳播。所有代表粒子运动的直綫只能在 aOc 及 dOb 两个区域內。显然，在直綫 ab 及 cd 上，$x=\pm ct$。我們先研究那些事件，它們的世界点是在 aOc 区域內。很容易理解，在这个区域內的所有的点，$c^2t^2-x^2>0$。換一句話說，在这个区域內的任何事件与 O 事件的間隔是类时的。在

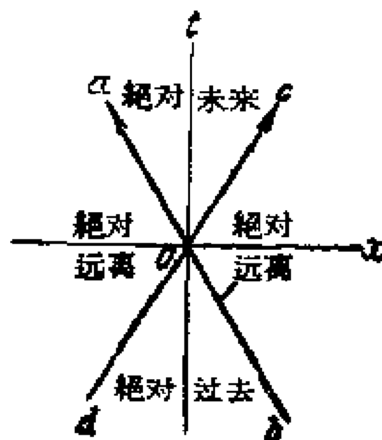


圖 1-2.

这个区域内 $t>0$，即在这个区域内所有的事件都發生在 O 事件之后。但是两个事件若被类时間隔所分开，无論在那一个参考系統内都不可能同时發生。所以，不可能找到一个参考系統，在这个系統中，aOc 区域的任何事件会在事件 O 之"前"發生，即在 $t<0$ 时發生。因此，在 aOc 区域内的所有事件对 O 来說在任何参考系統中都是未来的事件。所以，这个区域对事件 O 来說可称为"絕对未来"。

完全类似地，所有在区域 bOd 内的事件对 O 来說都是"絕对过去"，即本区域的事件，无論在任何参考系統中都在 O 事件前發生。

最后，再研究 dOa 及 cOb 两个区域。本区域内的任何事件与 O 事件的間隔都是类空的。这些事件在任何参考系統中發生在空間里的不同点。因之，这些区域对于 O 来說都可称为"絕对远离"。但是，关于这些事件的"同时"、"較早"及"較晚"等观念都是相对的。对这些区域内的任何事件来說，有一些参考系統存在，在这些系統中，此事件在 O 事件后發生；也有一些参考系統存在，在这些系統中，此事件在 O 事件前發生；最后也有一个参考系統存在，在这个系統中，此事件与 O 事件同时發生。

我們要注意，如果考虑所有三个空間坐标軸，而不只考虑一个空間坐标軸，那么，代替圖 1-2 中的两条相交的綫，我們将有一个"圓錐体" $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$（在四度空間坐标系統内，x, y, z, t 为其軸），圓錐体的軸与 t 軸叠合。这个圓錐体称为"光錐"。这时，絕对未来与絕对过去就由錐体的两个内区域来代表。

两个事件仅仅在其間隔是类时間隔的情况下，才彼此有因果关系；这可由相互作用的傳播速度不能大于光速这一事实直接推出来。如我們剛才已經看到的，正是对这些事件来說，"較早"与"較晚"等观念才有絕对意义，而这一点又是使因果观念具有意义的必要条件。

§ 1-3. 固有时

假設在某一个慣性参考系統內，我們观察一些鐘，这些鐘相对于我們可作任意形式的运动。在各个不同的瞬間，我們可以認为这种运动是匀速的。因此，在每一瞬間，我們可以引用一个与运动的鐘有固定联系的坐标系統，这个坐标系統和鐘在一起也是一个慣性参考系統。

在一个无限小的时間間隔 dt（根据在我們靜止坐标系統內的鐘）內，运动的鐘所行走的距离是 $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$。我們要問，这时，运动的鐘所指示的时間間隔 dt' 又如何？在与运动的鐘相联系的坐标系統內，鐘是靜止的，即 $dx'=dy'=dz'=0$. 因为間隔是不变的，所以

$$ds^2=c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=c^2\,dt'^2,$$

由此可得
$$dt'=\frac{ds}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{c^2\,dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}$$

或
$$dt'=dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

但

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2,$$

其中 v 为运动的鐘的速度；所以

$$dt'=\frac{ds}{c}=dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{1-11}$$

將上式积分，我們可以得到，当靜止的鐘所行走的时間为 t_2-t_1 时，运动的鐘所指示的时間間隔是

$$t_2'-t_1'=\int_{t_1}^{t_2}dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{1-12}$$

随着某一給定物体一同运动的鐘所指示的时間，称为該物体

的"固有时間"。公式(1-11)及(1-12)是将固有时間通过观察运动的参考系統的时間表示出来。

由(1-11)及(1-12)可見，一个运动物体的固有时間永远較在静止系統內的相对应的时間間隔为小。換句話說，运动的鐘較静止的鐘走得慢些。

假設有些鐘相对于某一慣性参考系統K作勻速直綫运动。一个同这些鐘紧連着的参考系統K'也是慣性系統。从一个K系統內的观察者来看，K'系統內的鐘都落后了。反过来說，从K'系統內的观察者来看，K系統內的鐘都落后了。为了使我們相信，这是不矛盾的，可以注意下面的事实。为了确定K'系統內的一些鐘落后于K系統內的一些鐘，我們必須按下述的方法去作。假設在某一瞬間，K'內的一个鐘經过K內的一个鐘的旁边而在这一瞬間，两个鐘所指示的时間恰好一样。为了比較K及K'內的两个鐘的快慢，我們必須再一次将那些在K'內运动的鐘的讀数与K內的一些鐘的讀数作一比較。在新的瞬間，运动的鐘将从K內的另一些鐘旁边經过，現在我們就将运动的鐘与那些鐘比較。即这时我們發現，K'內的鐘比借以比較的K內的鐘落后。由此可見，为了比較两个参考系統內的鐘的快慢，我們需要在一个系統內有几个鐘，而在另一个系統內有一个鐘。因此这种过程对这两个系統来說，并不是对称的。同另一参考系統內不同的一些鐘相比較的那一个鐘总是落后的鐘。

假設我們有两个鐘，其中之一描繪一閉合曲綫，又回到出發点(即静止的鐘所在之点)，显然运动的鐘落后了(与静止的鐘相比)。相反的推論，即設想运动的鐘是静止的(而静止的鐘是运动的)，現在是不可能的，因为那个鐘既然描繪了一个閉合曲綫，它的运动就不是勻速直綫运动，因而与之相連的参考系統就不是慣性的。因为自然定律只有在不同的慣性系統內才是一样的，与静止的

鐘相連的系統(慣性系統)及与运动的鐘相連的系統(非慣性系統)具有不同的特性，因而导致靜止的鐘应当是落后的这个結論的論断就不对了。

一个鐘所指示的时間間隔等于沿着鐘的世界綫而取的积分 $\frac{1}{c}\int_a^b ds$。假如鐘是靜止的，則显然它的世界綫是一条直綫并与 t 軸平行；假如鐘在閉合路徑上作非匀速运动而且又回到出發点，那么，它的世界綫就是一条曲綫，这条曲綫經过靜止鐘的直的世界綫的两点，这两点与运动的开始及終止相对应。另一方面，我們看到，靜止的鐘所指示的时間間隔永远較运动的鐘所指示的为大。因此，我們得到一个結論，在两个世界点間所取的积分 $\int_a^b ds$，如果是沿着連接这两点的直的世界綫而积分(当然，a 及 b 两个世界点的間隔必須是类时的，否则积分就是复数了)，則有最大值[①]。

§1-4. 洛倫兹变換

我們現在的目的是要找出，从一个慣性系統到另一个慣性系統的变換公式，根据这个公式，当某一个事件在 K 系統内的坐标 x, y, z, t 为已知时，就可以找到同一事件在另一个慣性系統 K' 內的坐标 x', y', z', t'。

在經典力学中，这个問題的解决是很簡單的。由于时間的絕对性，我們有 $t=t'$；其次，假若坐标軸的取法和通常一样(即 X, X' 两軸叠合，Y, Z 分別与 Y', Z' 軸平行，运动是沿着 X, X' 軸)，那么很明显，y, z 就等于 y', z'，而 x 与 x' 則相差一个距离，即一个系統

① 积分 $\int_a^b ds$ 的特性是，坐标之一是虚数($\tau = ict$)；若四个坐标都是实数，那么当然，$\int ds$ 沿这个直綫将有最小值。

对于另一系統所行走的距离。假如两个坐标系統叠合的时刻被取为时間的原点，并假設 K' 系統对于 K 系統的相对运动的速度为 V，那么，这个距离就是 Vt。所以，

$$x'=x-Vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t. \tag{1-13}$$

这些公式称为伽利略变换。很容易証明，这个变换式，如我們所預料的一样，不能滿足相对論的要求；这个变换式不能使事件与事件的間隔不变。

我們将求出相对論的变换公式，这些变换公式恰好是根据那个事件間的間隔不变的要求的。

如果我們为了便于以后的叙述利用量 $\tau=ict$，那么，正如在 §1-2 里所看到的二事件間的間隔可以認为是在四度空間內的相对应的两个世界点間的距离。因此我們可以說，所要求的变换，必須是使所有在四度空間 x, y, z, τ 內的距离不变的变换。但是这些变换仅仅包含坐标系統的平行移动与旋轉。其中，我們对于坐标軸对自己作平行移动并无兴趣，因为这不过是将空間坐标的原点移动一下，并将时間的参考点改变一下而已。所以，所要求的变换，在数学上应当表示为四度坐标系統 x, y, z, τ 的旋轉。

四度空間內的一切旋轉，可以分解为六个分别在六个平面 $xy, yz, zx, x\tau, \tau y, \tau z$ 內的旋轉(正如在三度空間內的一切旋轉可以分解为三个分别在 xy, yz, xz 三个平面內的旋轉一样)。其中，前三个旋轉仅仅变换空間坐标，它們和通常的空間旋轉相当。

我們研究在 τx 平面內的旋轉，这时 y 与 z 坐标是不变的。若 ψ 为旋轉角，那么，新旧坐标的关系就由以下二式决定：

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\psi-\tau'\sin\psi,\\ \tau&=x'\sin\psi+\tau'\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

我們现在要找出那个由一个慣性参考系統 K 到另外一个慣性系統 K' 的变换公式，K' 以速度 V 沿 X 軸对 K 作相对运动。在这

个情况下，显然只有空間坐标 x 与时間 τ 發生变化。所以这个变换必須有(1-14)的形式。現在只剩下决定旋轉角 ψ 的問題，而 ψ 又仅与相对速度 V 有关①。

我們来研究参考坐标系統 K' 的原点在 K 内的运动。这时 $x'=0$，而公式(1-14)可写成

$$x=-\tau'\sin\psi,\quad \tau=\tau'\cos\psi,$$

相除可得

$$\frac{x}{\tau}=-\tan\psi.$$

但 $\tau=ict$，而 x/t 显然是 K' 对 K 的速度 V。因此，

$$\tan\psi=i\frac{V}{c}.$$

由之得

$$\sin\psi=\frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad \cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

代入(1-14)，得：

$$x=\frac{x'-i\frac{V}{c}\tau'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\quad \tau=\frac{\tau'+i\frac{V}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

再将 $\tau=ict$，$\tau'=ict'$ 代入，最后得

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+V\frac{x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\qquad (1\text{-}15)$$

这就是所要求的变换公式。它們被称为洛倫茲变换式，是今后討論的基础。

用 x, y, z, t 来表示 x', y', z', t' 的倒置的公式只須以 $-V$ 代替 V 便得，因为 K 系統以速度 $-V$ 相对 K' 运动。这些表示 x', y',

① 注意，为了避免弄混，以后永远用 V 表示两个慣性坐标相对运动的恒定速度，用 v 表示質点运动的速度，v 并不必須为常数。

x', t' 的公式可直接求解方程式(1-15)而得。

由(1-15)式很容易看出，作向經典力学的極限过渡 $c\to\infty$，洛倫兹变换事实上就过渡到伽利略变换了。

当 $V>c$ 时，(1-15)式中的 x, t 变成虚数；这与运动速度不可能大于光速的事实符合。此外，我們也不可以用一个以光速运动的参考系統，因为在这种情形下，(1-15)式的分母將为零。

当 V 比光速小很多时，我們可以用下面的近似公式代替（1-15）：

$$x=x'+Vt, \quad y=y', \quad z=z', \quad t=t'+\frac{Vx'}{c^2}. \qquad (1\text{-}16)$$

假設在 K 系統內有一根平行于 X 軸的靜止的棍子。假定它在 K 系統內測定的長度为 $\Delta x=x_2-x_1$（x_2 及 x_1 为棍子二端在 K 系統內的坐标）。我們現在来求出这个棍子在 K' 系統內的長度。为了这个目的，我們需要在同一瞬間 t' 找出棍子两端在 K' 內的坐标 x_2' 及 x_1'。由(1-15)我們得到

$$x_1=\frac{x_1'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x_2=\frac{x_2'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

棍子在 K' 內的長度是 $\Delta x'=x_2'-x_1'$；由 x_2 減去 x_1，得

$$\Delta x=\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

棍子的“固有長度”是它在相对它为靜止的参考系統內的長度。以 $l_0=\Delta x$ 代表这个固有長度，以 l 代表它在任何其他参考系統K'內的長度。那么，

$$l=l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \qquad (1\text{-}17)$$

因此，一根棍子在它是靜止的那个参考系統內最長，在它是以速度 V 运动的那个参考系統內，它的長度就要减少到 $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$

倍。相对論的这个結果称为洛倫茲收縮。

因为物体的横向尺度(如寬及高)都不因运动而变，所以它的体积也按照相似的公式而收縮，即

$$\Omega=\Omega_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{1-18}$$

其中 Ω_0 代表物体的"固有体积"。

由洛倫茲变換，我們还可以得到我們已經知道的有关固有时間(§ 1-3) 的結果。假設在 K' 系統内有一个静止的鐘。我們假定有两个事件發生在 K' 内同一空間点 x', y', z'。在 K' 内这两事件之間的时間为 $\Delta t'=t_2'-t_1'$。現在我們要找出，在 K 系統內，同样的两事件之間的时間 Δt。由(1-15)得

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad t_2=\frac{t_2'+\frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

相減則得

$$t_2-t_1=\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

这一公式与公式(1-11)完全符合。

§ 1-5. 速度的变換

在上节中，我們求得一些公式，用这些公式，我們能够从一个事件在一个参考系統內的坐标找出同一事件在第二个参考系統內的坐标。現在我們要求出一个公式，用以表示一个粒子在一个参考系統內的速度与其在第二个参考系統內的速度之間的关系。

我們再一次假定 K' 系統对 K 系統以速度 V 沿 X 軸相对运动。設 $v_x=dx/dt$ 为粒子在系統 K 內的速度的分量，而 $v_x'=dx'/dt'$ 为同一粒子在系統 K' 內的速度的分量。由(1-15)，得

$$dx=\frac{dx'+V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad dy=dy',\ dz=dz',\ dt=\frac{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

用第四个方程除前三个，則得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx'+V\,dt'}{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt'+\frac{V}{c^2}\,dx'},$$

用 dt' 除上面三个方程的右边的分子与分母，則得

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+v'_x\frac{V}{c^2}},\ v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+v'_x\frac{V}{c^2}},\ v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+v'_x\frac{V}{c^2}}.\quad (1\text{-}19)$$

这些公式就决定了速度的变换。它們是相对論里的速度合成的規律。在極限情形下，即 $c\to\infty$ 时，它們就变为經典力学里的公式：

$$v_x=v'_x+V,\ v_y=v'_y,\ v_z=v'_z.$$

在粒子沿 X 軸运动的特殊情况下，$v_x=v,\ v_y=v_z=0$。那么，$v'_y=v'_z=0,\ v'_x=v'$，并且

$$v=\frac{v'+V}{1+v'\frac{V}{c^2}}.\quad (1\text{-}20)$$

很容易証实，如果两个速度各小于或等于光速，其合成速度，根据这个公式，也不会大于光速。

假如速度 V 比光速 c 小很多（v 可以是任意的），我們将近似地（准确到 V/c 的項，即略去 V^2/c^2 以上的項）得到

$$v_x=v'_x+V\left(1-\frac{v'^2_x}{c^2}\right),\ v_y=v'_y-v'_xv'_y\frac{V}{c^2},\ v_z=v'_z-v'_xv'_z\frac{V}{c^2}.$$

讓我們这样来选擇坐标軸，使粒子的速度在給定瞬間是在 XY 平面内。这时粒子在 K 系統内的速度的分量是 $v_x=v\cos\theta$,

$v_y = v\sin\theta$, 而在 K' 内則为 $v'_x = v'\cos\theta'$, $v'_y = v'\sin\theta'$ (v, v' 为速度在 K 及 K' 內的絕对值; θ, θ' 为速度与 X 軸及 X' 軸所夹之角)。

用(1-19)式,則得

$$\tan\theta = \frac{v'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \qquad (1\text{-}21)$$

这个公式决定了速度的方向从一个参考系統变换到另一个参考系統时的改变。

讓我們来詳尽地研究这个公式的一个重要特例，即光由一个参考系統变换到另一个参考系統时的偏差，即所謂光行差現象。在这种情形下 $v=v'=c$, 因而上式化为

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'}\sin\theta'. \qquad (1\text{-}22)$$

由同一变換公式(1-19),用相似的方法,很容易得到

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta', \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \qquad (1\text{-}23)$$

如果 $V \ll c$, 由上面的公式我們可以得到准确到数量級为 V/c 的項的公式如下:

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'.$$

若引用 $\Delta\theta = \theta' - \theta$(光差角),我們就得到同級的近似公式

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta', \qquad (1\text{-}24)$$

这就是著名的光行差的基本公式。

§ 1-6. 四度矢量

如果用 x, y, z, τ 四个量作为一个事件的坐标，我們就可以認

为x, y, z, τ是四度空間内的一个矢量的四个分量。这四个分量的平方之和，即矢量的長度的平方$x^2+y^2+z^2+\tau^2$，在四度坐标系統旋轉的情况下并不改变，洛倫兹变换是四度空間坐标旋轉的一个特例。

一个分量为x, y, z, τ的矢量称为"四度矢徑"。我們将用x_i代表它的分量，其中$i=1, 2, 3, 4$，并且

$$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=\tau=ict.$$

当我們从一个慣性参考系統变换到另一个时，即当作洛倫兹变换时，四度矢徑的分量根据(1-15)应当按下式变換：

$$x_1=\frac{x_1'-i\frac{V}{c}x_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ x_2=x_2',\ x_3=x_3',\ x_4=\frac{x_4'+i\frac{V}{c}x_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1\text{-}25)$$

如果四个量A_1, A_2, A_3, A_4的集合，当四度坐标系統变換时，作同分量x_i一样的变换，那么，它們就称为"四度矢量"A_i。当作洛倫兹变换时，

$$A_1=\frac{A_1'-i\frac{V}{c}A_4'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ A_2=A_2',\ A_3=A_3',\ A_4=\frac{A_4'+i\frac{V}{c}A_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1\text{-}26)$$

四度矢量有些特性同普通矢量很相似。很容易証明，正如普通矢量的标积一样，两个四度矢量的分量之积的和$A_1B_1+A_2B_2+$ $+A_3B_3+A_4B_4$是一个标量。以后我們将用A_iB_i来表示这种矢量的标积，并且以后我們一般将認为，如果有某一个拉丁文指标重复，那么，这就是从1到4取和的意思。因之，一个四度矢量的絕对值的平方就可用A_iA_i或A_i^2表示。这种表示和的方法（取和的符号省去）是便利的，它使許多公式大大地簡化。

以后我們用希腊文指标表示三度空間矢量的分量；希腊文指

标重复时，表示从 1 到 3 取的和(例如 $\mathbf{AB}=A_\alpha B_\alpha$)。

四度矢量的前三个分量称为空間分量，而第四个分量则称为时間分量，正如四度矢徑一样。我們所碰到的一切四度矢量的时間分量都是虛数。我們要注意，因为在分量 A_i 中，有些是虛数，所以 A_i^2 可以是正数，可以是負数，也可以是零。

一个二阶的四度空間張量(四度張量)可定义为十六个量 $A_{ik}(i, k=1, 2, 3, 4)$ 的集合，当坐标按

$$x_i=\alpha_{ik}x'_k \tag{1-27}$$

变换时，A_{ik} 作下列之变換(象坐标之积的变換一样)：

$$A_{ik}=\alpha_{il}\alpha_{km}A'_{ml}. \tag{1-28}$$

对于洛倫茲变換而言，

$$(\alpha_{ik})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix}. \tag{1-29}$$

滿足下面条件的張量 δ_{ik} 称为四度的單位張量：对于任何一个矢量 A_i 都有

$$\delta_{ik}A_k=A_i. \tag{1-30}$$

这个張量的分量显然是

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0, 若\ i\neq k, \\ 1, 若\ i=k.\end{cases} \tag{1-31}$$

由任何張量 A_{ik} 我們可以組成一个标量 $A_{ii}=A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}$，这个标量称为張量的"迹"；显然，

$$\delta_{ii}=4. \tag{1-32}$$

若$A_{ik}=A_{ki}$,那么，这个張量就称为对称張量，若$A_{ik}=-A_{ki}$,那么，就称为反对称張量。在一个反对称張量中，所有对角綫上的分量，即A_{11}、A_{22}、A_{33}、A_{44}都是零，因为，举例說，我們必須有$A_{11}=-A_{11}$。

高阶的張量可以用类似定义二阶張量的方法定义之。

完全反对称四阶四度單位張量是具有下述性質的張量e_{iklm},它的分量当两个指标交换时，改变符号，因而不为零的分量等于±1。由于反对称的原故，即使只有两个指标相同的分量都等于零，因而只有那些四个指标完全不同的分量才不等于零。設$e_{1234}=1$;那么，显然所有e_{iklm}的不为零的分量将等于+1、或−1;至于到底是+1还是−1,那就要看将i, k, l, m变为1, 2, 3, 4的次序时所須要的互換(易位)的次数是偶数还是奇数而定。此外，很容易証明，$e^2_{iklm}=4!$。

对于坐标系統的旋轉而言，e_{iklm}各量的特性就和張量分量的特性一样；但是，假若我們改变一个坐标的符号或三个坐标的符号，e_{iklm}的分量并不改变符号，因为它在所有坐标系統中都被定义为一样，而一个張量的分量在这种情况下是必須改变符号的。所以严格地說，e_{iklm}并不是一个張量，而是一个所謂贋張量。任意阶的贋張量，特别是贋标量，对于所有的坐标变換，都象張量，只有那些不能归結为旋轉的变換是例外，即反射——不能归結为旋轉的坐标符号的改变是例外。

假設A_{ik}是一个反对称張量，那么，張量A_{ik}同贋張量$\frac{1}{2}e_{iklm}A_{lm}$称为互为对偶的張量。同样，$e_{iklm}A_m$是一个三阶的反对称贋張量，并与矢量$A_i$对偶。一个二阶張量与其对偶張量的乘积$\frac{1}{2}e_{iklm}A_{ik}A_{lm}$显然是一个贋标量。

联系着上面討論，我們来提一下三度矢量与三度張量的一

些类似的特性。一个三阶完全反对称单位贋張量是这样一些量，$e_{\alpha\beta\gamma}$ 的集合，当我們将任何两个指标互换时，$e_{\alpha\beta\gamma}$ 就改变了符号。正如 e_{iklm} 一样，除了 $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ 的分量以外，所有的分量均为零。至于不为零的分量，那么 $e_{123}=1$；其余的显然或为 $+1$，或为 -1，至于到底是 $+1$，还是 -1，就要看将順序 α,β,γ 变到 1, 2, 3 时所須要的互换次数为偶数或为奇数而定。

在坐标系統反射的情况下，卽在所有三个坐标改变符号的情况下，普通矢量的分量也改变符号。这种矢量称为極矢量。一个矢量的分量假若可以用两个極矢量的矢积来表示，那么，这个矢量的分量在坐标系統反射时不改变符号。这种矢量称为軸矢量。一个極矢量同一个軸矢量的标积，并不是一个眞正的标量，而是一个贋标量；在坐标系統反射时，它要改变符号。軸矢量是一个贋矢量，与某一个反对称張量对偶。因此，假若 $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ 则

$$C_\alpha=\frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\gamma},$$

其中

$$C_{\beta\gamma}=A_\beta B_\gamma-A_\gamma B_\beta.$$

在三度空間內，可以取体积积分、面积积分和綫积分。在四度空間內，相应地可能有四种类型的积分。

1）在四度空間內的一条曲綫上的积分；积分元素就是弧元，卽四度矢量 dx_i。

2）在四度空間內的一个两度面上的积分。我們知道，在三度空間內，**A**、**B** 两个矢量所构成的平行四边形在坐标平面 $x_\alpha x_\beta$ 上的投影面积为 $A_\alpha B_\beta-A_\beta B_\alpha$；同样地，在四度空間內，两个四度矢量 A_i 与 B_i 所构成的平行四边形，在六个坐标面 x_ix_k 上的投影面积，将由反对称張量 $A_iB_k-A_kB_i$ 所决定。就特例言之，一个无穷小的面元，則由二阶反对称張量 df_{ik} 所决定，它的分量等于面元在坐标平面上的投影面积。大家知道，在三度空間內，我們用一个与

張量 $df_{\alpha\beta}$ 对偶的矢量 df_α 来代替張量 $df_{\alpha\beta}$ 作为面元，即 $df_\alpha = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}df_{\beta\gamma}$。在几何学上，这个矢量垂直于面元，并且它的絕对値等于面元的面积　在四度空間内，我們不能創造这样的一个矢量，但是我們可以造成一个与 df_{ik} 成对偶的張量 df^*_{ik}，即

$$df^*_{ik} = \frac{1}{2}e_{iklm}df_{lm}. \qquad (1\text{-}33)$$

在几何学上，这个張量描述一个面元，这个面元等于并垂直于 df_{ik} 所有在 df^*_{ik} 上的直綫都同在 df_{ik} 上的直綫垂直。

3）在一个超曲面上，即在一个三度簇（三度体积）上的积分。大家知道，在三度空間内，三个矢量 **A**, **B**, **C** 所构成的平行六面体的体积等于这三个矢量的分量所組成的三阶行列式。在四度空間内，三个四度矢量 A_i、B_i、C_i 所构成的平行六面体的投影体积（即超曲面的面积）决定于以下各行列式：

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_k & B_k & C_k \\ A_l & B_l & C_l \end{vmatrix},$$

这些行列式构成一个三阶張量对于所有三个指标来說，它都是反对称的。特别說来，无穷小的超曲面元决定于反对称張量 dS_{ikl}。当在超曲面上积分时取一个与張量 dS_{ikl} 对偶的四度矢量 dS_i 作为积分元素較为方便，而

$$dS_i = -\frac{1}{6}e_{iklm}dS_{klm}, \quad dS_{ikl} = e_{klmi}dS_m \qquad (1\text{-}34)$$

（很容易証明，dS_i 的分量是：$dS_1 = dS_{234}$, $dS_2 = dS_{143}$ 等等）。在几何学上，这个四度矢量的絕对値等于超曲面元的面积，而其方向則垂直于該面元（即垂直于超曲面元内的所有的直綫）。很显然，$dS_4 = dx\,dy\,dz$ 等于一个三度体积元 dV，这就是超曲面在超平面 $x_4 =$ 常数上的投影。

4）在一个四度体积上的积分；积分元素为四度体积元

$$d\Omega = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4.$$

与三度空間內的积分的高斯及斯托克斯定律类似，在四度空間內也有一些定理，根据这些定理，我們可以进行四度积分的互相变换。在这些定理中，下面两个定理以后对我們有用。在一个閉合的超曲面上的积分，可以变换成为一个在該面內的四度体积上的积分，变换的方法就是用算符

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1\text{-}35)$$

代替积分元素 dS_i。例如，对于矢量 A_i 的积分，我們有

$$\oint A_i\, dS_i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\, d\Omega.$$

这个定理显然是高斯定理的推广。

在一个普通曲面上的积分可以变换成为該曲面所"包圍"的超曲面上的积分，只須用算符

$$df^*_{ik} \to \frac{1}{2}\left(dS_i \frac{\partial}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \qquad (1\text{-}36)$$

代替积分元素 df^*_{ik} 就行了。

例如，对于反对称張量 A_{ik} 的积分来說，我們有

$$\int A_{ik}\, df^*_{ik} = \frac{1}{2} \int \left(dS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i}\right) = \int dS_i \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k}.$$

为了完备起見，我們在此也引用一个变换规則，用这个规則，可以将一个在四度空間內的一条閉合曲綫上的积分，变换成为一个在曲面上的积分，这个曲面为閉合曲綫所包圍；这可用以下的替换来实現：

$$dx_i \to df_{ki} \frac{\partial}{\partial x_k}. \qquad (1\text{-}37)$$

例如，对于一个矢量的积分来說，

$$\oint A_i dx_i = \int df_{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \int df_{ik} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right), \qquad (1\text{-}38)$$

这是斯托克斯定理的推广。

§1-7. 四度速度与四度加速度

由普通的三度速度矢量，我們可以造一个四度矢量。一个粒子的四度速度是矢量

$$u_i=\frac{dx_i}{ds}. \tag{1-39}$$

为了求出它的分量，我們应注意，根据(1-11)，

$$ds=c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

其中 v 为粒子的普通三度速度。因此，

$$u_1=\frac{dx_1}{ds}=\frac{dx_1}{c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

我們用同样的方法来求 u_2, u_3, u_4，結果我們得到：

$$u_\alpha=\frac{v_\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad u_4=\frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1-40}$$

应該注意，四度速度是一个无量綱的量。

四度速度的分量并不彼此独立。注意到，$dx_i^2=-ds^2$，我們有

$$u_i^2=-1. \tag{1-41}$$

所以，就几何意义言之，我們可以說，u_i 是一个四度單位矢量。

一个粒子的四度加速度是矢量

$$w_i=\frac{du_i}{ds}. \tag{1-42}$$

利用(1-40)及(1-41)，我們求得它的分量

$$\left.\begin{aligned}w_\alpha&=\frac{1}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),\\ w_4&=\frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{1-43}$$

微分(1-41),得

$$u_i\frac{du_i}{ds}=0$$

或

$$u_iw_i=0. \tag{1-44}$$

習　題

有一个粒子,以速度 $\mathbf{V}(t)$运动着。有一个参考系統,粒子在这个参考系統中在給定瞬間是靜止的,当:(a)$\mathbf{V}$ 仅仅改变方向的时候;(b)$\mathbf{V}$ 仅仅改变大小的时候,求粒子在这个参考系統中的加速度 w_0。

解:在所指出的参考系統中,w_i 的空間分量等于 $\frac{1}{c^2}\left|\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right|=\frac{w_0}{c^2}$,而时間分量为零。故 $w_0^2/c^4=w_i^2$;既然 w_i^2 是一个标量,所以 w_i^2 在其他参考系統中也等于 w_0^2/c^4。用上面的結果,并計算 w_i,在(a)情形中我們得:

$$w_0=\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left|\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right|,$$

在(b)情形中我們得:

$$w_0=\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left|\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right|.$$

第二章　相对論力学

§2-1. 相对論中的基本粒子

在經典力学中，可以引用剛体观念，所謂剛体，就是在任何情况下都不發生形变的物体。在相对論中，剛体应該相应地被理解为这样一些物体，在它們为靜止的那个参考系統中，它們所有的尺寸保持不变。但是，很容易看出，在相对論中，剛体的存在一般是不可能的。

我們来研究，比方說，一个繞着自己的軸旋轉的圓盘，假設它是剛体。与圓盘緊联着的参考系統显然不是慣性系統。但是，对于圓盘的每一个不大的元素都可以引用一个慣性参考系統，在該慣性系統內，这个元素在給定瞬間是靜止的；对于圓盘上有不同速度的不同的元素，这些慣性系統当然是不同的。現在讓我們来考察沿盘的某一半徑分布的一系列綫元。因为圓盘是剛体，所以每一段的長度在与該段的相应的慣性参考系統中，仍旧同圓盘在靜止时該段的長度一样。因为每一段都垂直于它自己的速度，因而在这种情况下就沒有洛倫茲收縮，所以，一个靜止的观察者，当圓盘的半徑从他旁边扫过时，所量出的綫段長度，与圓盘在靜止时所量出的一样。因此，靜止观察者所测量出来的半徑的总長(等于組成它的各段之和)同圓盘靜止时所量得的一样。另一方面，在給定瞬間，圓盘圓周上从靜止观察者旁边經过的每一元素都要發生洛倫茲收縮，所以整个圓周(即靜止的观察者所测出的各段長度的和)之長将比較靜止圓盘的圓周之長为小。因之，我們得到一个結

論，因为圓盘旋轉的原故，圓周与半徑之比(靜止的观察者所測得的結果)必定改变，而不等于 2π。这样荒謬的結果証明，实际上圓盘不可能是剛体，而当旋轉时，圓盘必然發生了复杂的形变，这种形变与制成圓盘的物質的弹性有关。

我們还可以用另外一个方法来証明剛体是不可能存在的。假設一外力作用于某一固体的某一点上，使这个物体运动。如果这个物体是剛体，那么，它的所有各点必定与外力作用的一点同时运动，否則物体就要变形了。但是根据相对論，这是不可能的，因为力的作用是以有限速度从受力作用的点傳到另外的点，因而所有的点不可能同时开始运动。

从这些討論，我們得出关于所謂基本粒子的一些結論。基本粒子就是这样的一个粒子，它在所有物理現象中，只能表現为一个整体，即談它的部分是沒有意义的。換句話說，只要把一个基本粒子看作一个整体，并給出它的位置与速度，它的情况就完全确定了。很明显，假如一个基本粒子具有有限的尺寸，那么，它必然不能变形，因为变形的观念与物体的各个部分有独立运动的可能性相联系着。但是，我們剛才已經看到，相对論指出剛体是不可能存在的。因之，我們得到一个重要的結論：基本粒子不可能具有有限尺寸，而应当把它当作一个几何点。

§ 2-2. 最小作用量原理

为了研究粒子的运动，我們將从最小作用量原理出發。大家知道，最小作用量原理是說：对于每一个力学体系，有一个叫做作用量的积分 S 存在，这个积分对于实际运动有最小值，因此它的变分 δS 为零[1]

---

[1] 严格說来，最小作用量原理斷定，积分 S 仅仅对于小的积分区間才应当是最小值。对于任意長度的积分区間，只能斷定积分 S 有極端值，并非必須有最小值。

为了决定对于一个自由粒子(一个不在外力影响下的粒子)的作用量积分，我們要注意这个积分必定与慣性参考系統的选择无关，这就是說，它对于洛倫兹变换必須是一个不变量。由此可知，它必定是一个标量函数。此外，很明显地，被积分的函数必須是一个一阶微分。但是对于一个自由粒子，我們所能造出的唯一的这种标量，仅仅是間隔 ds，或 αds，其中 α 是某一常数。这样一来，对于一个自由粒子，作用量积分必須取下面的形式：

$$S=-\alpha\int_a^b ds,$$

其中 $\int_a^b$ 表示沿着粒子在两个特定事件間的世界綫的积分，这两个特定事件就是粒子在 t_1 瞬間到达初位置和在 t_2 瞬間到达末位置，也就是說，$\int_a^b$ 是沿着两个世界点之間的世界綫的积分；而 α 則为表征該粒子的一个常数。很容易看出，对所有粒子来說，α 必須是正数，的确，在§1-3节中，我們已經看到 $\int_a^b ds$ 沿着一条直的世界綫的值是最大；沿着一条弯曲的世界綫，我們可以使积分任意小。所以，积分 $\int_a^b ds$ 如果取正号，則不可能有最小值；如果取負号，那么，显然，当沿着一条直的世界綫积分时，它有最小值。

这个作用量积分可以变为对时間的积分 $S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$。如所周知，系数 L 叫做这个力学体系的拉格朗日函数。利用(1-11)，我們求得

$$S=-\int_{t_1}^{t_2}\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt,$$

其中 v 为粒子的速度。因之，对粒子来說，拉格朗日函数是

$$L=-\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

上面已經說过，α 是表征該粒子的一个量。在經典力学中，每个粒子的特征就是它的質量 m。我們来找 m 与 α 二量的关系。这可以从下面的条件定出来，在作 $c\to\infty$ 的極限过渡时，L 的表示式应当过渡到它的經典表示式 $L=\frac{1}{2}mv^2$，其中 m 是粒子的經典質量。为了实現这个过渡，我們将 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 展开为 v/c 的冪級数。略去高次項以后，我們便得到

$$L=-\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx-\alpha c+\frac{\alpha v^2}{2c}.$$

我們知道，在拉格朗日函数中，对时間为全微商的項是不重要的，因而可以从函数中略去①。任何常数都是同一常数与 t 的乘积的全微分；所以可以从 L 中略去。略去常数 αc，我們得到 $L=-\alpha v^2/2c$，在經典力学中，$L=mv^2/2$。因之，我們必須有 $\alpha=mc$。

所以，自由粒子的作用量积分是

$$S=-mc\int_a^b ds, \tag{2-1}$$

而拉格朗日函数是

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{2-2}$$

§ 2-3. 能量与冲量

我們知道，矢量 $\mathbf{p}=\partial L/\partial\mathbf{V}$（$\partial L/\partial\mathbf{V}$ 是代表一个矢量的符号，

---

① 当我們求作用量积分 $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ 时，对时間的全微商給出一些与积分路徑无关的量，这些量在对作用量取变分时将消失。

这个矢量的分量为 L 对 $\mathbf{V}$ 的相应的分量的微分）称为粒子的冲量。利用(2-2)，我們得到

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2-3}$$

对于很小的速度 ($v\ll c$)，或 $c\to\infty$ 的極限情形下，上式就变为經典的公式 $\mathbf{p}=m\mathbf{V}$。当 $v=c$ 时，冲量 $\mathbf{p}$ 就变为无穷大。

冲量对时間的导数 $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$ 就是作用于粒子的力。假定粒子的速度仅仅改变方向，就是說，假定力垂直于速度，那么，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{V}}{dt}. \tag{2-4}$$

若速度仅仅改变大小，就是說，若力平行于速度，那么

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{V}}{dt}. \tag{2-5}$$

因之，力与加速度之比，在两种情况下，并不相等。在第一种情况下，它等于 $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$，而在第二种情况下，它等于 $m/(1-v^2/c^2)^{3/2}$。

粒子的能量 $\mathscr{E}$，我們知道，可用下式定义之：

$$\mathscr{E}=\mathbf{p}\cdot\mathbf{V}-L.$$

以表示式(2-2)及(2-3)代替 L 及 $\mathbf{p}$，則得

$$\mathscr{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2-6}$$

由这一表示式可以看到，在相对論力学中，甚至当速度等于零时，粒子的能量也不为零。这个靜止能量，即 $v=0$ 时的能量，等于

$\mathscr{E}=mc^2$。

在速度很小$(v/c\ll 1)$的情况下，将(2-6)式展为v/c的幂級数，我們得到

$$\mathscr{E}\approx mc^2+\frac{mv^2}{2},$$

就是説，除靜止能外，此式就是一个粒子的动能的經典表示式。

从(2-3)及(2-6)我們得到一个自由粒子的能量与冲量的关系如下：

$$\mathbf{p}=\mathscr{E}\frac{\mathbf{v}}{c^2}. \qquad (2\text{-}7)$$

当$v=c$时，粒子的冲量与能量都变为无穷大。这就是説，一个粒子，如果它的質量不为零，就不可能用光的速度运动。然而在相对論力学中，可能存在这样一个粒子，它的質量为零，而以光的速度运动。由(2-7)，对于这一类的粒子我們有

$$p=\frac{\mathscr{E}}{c}. \qquad (2\text{-}8)$$

以后我們可以看到，光可以認为是这一类質量为零的粒子。

現在我們来推导得到的所有关系式的四度形式。按照最小作用量原理，

$$\delta S=-mc\delta\int_a^b ds=0.$$

为了建立δS的表示式，我們注意到$ds=\sqrt{-dx_i^2}$，因此，

$$\delta S=-mc\delta\int_a^b\sqrt{-dx_i^2}=-mc\int_a^b\delta\sqrt{-dx_i^2}=$$

$$=-mc\int_a^b\frac{-dx_i\delta\,dx_i}{\sqrt{-dx_i^2}}=mc\int_a^b u_i\,d\delta x_i,$$

因为 dx_i/ds 是四度速度的分量。用部分积分法，我們得到

$$\delta S = mc\int_a^b u_i d\delta x_i = mcu_i\delta x_i\Big|_a^b - mc\int_a^b \delta x_i du_i =$$

$$= mcu_i\delta x_i\Big|_a^b - mc\int_a^b \delta x_i w_i ds, \quad (2\text{-}9)$$

其中 $w_i = \dfrac{du_i}{ds}$ 是四度加速度。

大家知道，为了求得运动的方程，就必須比較經过两个給定状态的不同的軌道，即是在上限和下限有 $(\delta x_i)_a = (\delta x_i)_b = 0$。实际的軌道这时是由 $\delta S = 0$ 这个条件来决定的。由(2-9)我們得到方程 $w_i = 0$；这就是自由粒子的速度恒定性的四度形式方程。

为了表示作用量的变分为坐标的函数，我們知道，a 点必須当作是固定的，所以 $(\delta x_i)_a = 0$。第二点应該当作是变化的，但是这时只考虑实际的軌道，即那些滿足运动方程的軌道。因此，在表示 δS 的(2-9)式中，积分項为零。代替 $(\delta x_i)_b$，可以簡單地写 δx_i；因之，得

$$\delta S = mcu_i\delta x_i. \quad (2\text{-}10)$$

分量为 $\dfrac{\partial S}{\partial x_i}$ 的四度矢量称为四度冲量矢量。我們将用 p_i 来代表它。由(2-10)可知，一个自由粒子的四度冲量的分量是

$$p_i = mcu_i. \quad (2\text{-}11)$$

我們知道，在力学中的导数 $\dfrac{\partial S}{\partial x}$，$\dfrac{\partial S}{\partial y}$，$\dfrac{\partial S}{\partial z}$ 是一个粒子的冲量的三个分量，而导数 $-\dfrac{\partial S}{\partial t} = -\dfrac{\partial S}{\partial \tau}ic$ 则是这个粒子的能量。用四度速度的分量的表示式(1-40)，很容易証明 p_i 的空間分量实际上就是冲量 $\mathbf{p}$，而时間分量则是 $\dfrac{i\mathscr{E}}{c}$：

$$p_\alpha = p_\alpha, \quad p_4 = \frac{i\mathscr{E}}{c}. \quad (2\text{-}12)$$

因之，在相对論力学中，冲量与能量是一个四度矢量的分量。从而就直接得到，冲量与能量由一个慣性系統到另一个慣性系統的变换公式。将四度冲量的分量公式(2-12)代入四度矢量的普遍变换公式(1-26)内，我們得到

$$p_x=\frac{p'_x+\frac{V}{c^2}\mathscr{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad p_y=p'_y,\quad p_z=p'_z,\quad \mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}'+Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (2-13)$$

注意到四度速度的平方 $u_i^2=-1$(1-31)，我們就有

$$p_i^2=-m^2c^2. \qquad (2-14)$$

用表示式(2-12)代替分量 p_i，我們得

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2}=p^2+m^2c^2. \qquad (2-15)$$

大家知道，用冲量来表示的能量，就称为哈密頓函数 $\mathscr{H}$。由(2-15)，我們得

$$\mathscr{H}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}. \qquad (2-16)$$

对于比 c 小的速度，冲量 $p\ll mc$。由(2-16)，我們就得到 $\mathscr{H}$ 的近似式：

$$\mathscr{H}=mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}\approx mc^2+\frac{p^2}{2m},$$

就是說，除了靜止能以外，我們得到了熟知的哈密頓函数的經典表示式。

在(2-14)中，以 $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ 代替 p_i，我們得

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2=-m^2c^2, \qquad (2-17)$$

将量 $\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2$ 逐項写出，則得

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+m^2c^2=0. \qquad (2-18)$$

这就是相对論力学中的哈密頓-雅可比方程。

要将方程(2-18)过渡到極限情况下的經典力学方程，可用下法来实现。首先我們应該注意，正如相应的(2-16)式的过渡情况一样，在相对論力学中，一个粒子的能量含有 mc^2 一項，而在經典力学中則无此項。因为作用量 S 与能量有 $\mathscr{E}=-\frac{\partial S}{\partial t}$ 的关系，所以在过渡到經典力学时，必須用新的作用量 S' 代替 S，而 S' 与 S 則有下列关系：

$$S=S'-mc^2t.$$

将上式代入(2-18)，則得

$$\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2+2m\frac{\partial S'}{\partial t}=0.$$

在 $c\to\infty$ 的極限情况下，这个方程就变为經典哈密頓-雅可比方程了：

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial S'}{\partial t}=0.$$

在某些計算中，我們必須进行在"冲量空間"里的积分。由于这个原故，解釋一下冲量空間內的体积元 $dp_xdp_ydp_z$ 在洛倫茲变换下的性質，是有用的。假若我們引用一个四度坐标系統，把四度冲量的四个分量放在它的四个軸上，那么，$dp_xdp_ydp_z$ 就可認为是由方程(2-14)所决定的超曲面面元的第四个分量。超曲面面元是一个四度矢量，它的方向是沿着超曲面的法綫方向，在現在的情况下，法綫方向显然与四度矢量 p_i 方向重合。由此可以断定

$$\frac{dp_xdp_ydp_z}{\mathscr{E}} \tag{2-19}$$

是一个不变量，因为它是两个四度矢量的相对应的分量的比。

假若我們在冲量空間內引用"球坐标"，那么体积元 $dp_xdp_ydp_z$ 就变为 $p^2dpd\omega$，其中 $d\omega$ 是圍繞着矢量 $\mathbf{p}$ 的方向的立体角元。注意到 $pdp=\frac{1}{c^2}\mathscr{E}d\mathscr{E}$[根据(2-15)]，我們便得

$$\frac{p^2 dp d\omega}{\mathscr{E}} = \frac{pd\mathscr{E}d\omega}{c^2}.$$

因此，我們發現表示式

$$pd\mathscr{E}d\omega \tag{2-20}$$

也是不变量。

最后，我們来介紹四度力矢量，定义冲量为导数

$$f_i = \frac{dp_i}{ds} = mc\frac{du_i}{ds}. \tag{2-21}$$

因为 $u_i\frac{du_i}{ds}=0$, 所以四度力的分量也滿足同样的恒等式

$$f_i u_i = 0. \tag{2-22}$$

这个四度力矢量 f_i 的空間分量构成一个矢量 $\frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, 其中 $\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 是一个普通的三度力。直接由(2-22)式可以求出时間分量

$$f_4 = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{f}\mathbf{v},$$

f_4 与功 $\mathbf{fv}$ 有关，而 $\mathbf{fv}$ 則为力 $\mathbf{f}$ 在單位时間內所作之功。

§2-4. 質量亏損

上节所講述的各公式，对于許多粒子所組成的复杂物体的整体运动，也可以同样地应用。在这种情况下，質量应理解为物体的总質量，而速度应理解为整个物体的运动速度。

讓我們考虑一个(整体)静止的物体。这个物体的能量，我們可以称之为內能，就簡單地等于 Mc^2, 此处 M 是物体的質量。因为質量是正的，这个內能显然将永为正值；运动物体的总能量 $\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 也是正的(v 为物体整体的运动速度)。因此，我們得到一

个結論，在相对論力学中，一个閉合系的能量永为正値，这与經典力学中的情形不同，在經典力学中，一个閉合系的能量可能是正的，也可能是負的。

物体的内能 Mc^2 除了包含組成这个物体的粒子的静止能以外，还包含着这些粒子的动能以及它們彼此之間的相互作用能。換句話說，Mc^2 不等于 $\sum_A m_A c^2$，其中 m_A 为組成这个物体的粒子的質量，因之 M 也就不等于 $\sum m_A$。所以，在相对論力学中，質量守恒定律不成立；复杂物体的質量并不等于它的各部分的質量之和。在相对論力学中，只有能量守恒定律成立，而在能量当中也要包括粒子的静止能。

复杂物体的質量与其組成部分的質量之和的差 $\Delta M = M - \sum_A m_A$ 称为"質量亏損"。ΔMc^2 这个量称为物体的"結合能"。

讓我們来考察一个由两部分（它們的質量为 M_1 及 M_2）組成的物体，我們在它为静止的参考系統内来考察它；假設这个物体自动地分裂为两部分，其速度为 v_1 及 v_2。那么，按照能量守恒定律，得到

$$Mc^2 = \frac{M_1c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{M_2c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}.$$

仅仅当 $M > M_1 + M_2$ 时，即仅仅当質量亏損 $\Delta M = M - M_1 - M_2$ 为正时，上面的方程才能滿足。因之，仅仅当物体的質量亏損（对于分裂成的部分而言）为正时，它才能自动分裂。反之，假若質量亏損为負，那么，这个物体就是稳定的，不会自动分裂。很容易証明，在这种情况下，要使分裂發生，我們必須从外面供給能量，而供給的能量至少也要等于結合能 $|\Delta M|c^2$。

習　題

1. 一个質量为 m_1，速度为 v 的粒子同一个静止的粒子 m_2 碰撞，碰撞以后就合而为一了。求这个合成粒子的質量 M 及速度 V。

解：質量 $M=\frac{1}{c^2}\sqrt{\mathscr{E}^2-p^2c^2}$，其中 $\mathscr{E}$ 及 p 为合成粒子的能量及冲量，并分别等于两个碰撞粒子的能量之和及冲量之和。速度則为 $V=p\frac{c^2}{\mathscr{E}}$。結果我們得：

$$M^2=m_1^2+m_2^2+\frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\qquad V=\frac{m_1v}{m_1+m_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

2. 一个質量为 M 的物体，当静止时分裂为質量为 M_1 及 M_2 的两部分。求这两部分的能量 $\mathscr{E}_1$ 及 $\mathscr{E}_2$。

解：按照能量及冲量守恒定律，得 $Mc^2=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$ 及 $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0$，或 $p_1^2=p_2^2$，即 $\mathscr{E}_1^2-\mathscr{E}_2^2=M_1^2c^4-M_2^2c^4$。由上面两个方程，得

$$\mathscr{E}_1=c^2\frac{M^2+M_1^2-M_2^2}{2M},\qquad \mathscr{E}_2=c^2\frac{M^2-M_1^2+M_2^2}{2M}.$$

§2-5. 碰撞

我們現在来考虑两个粒子的弹性碰撞。弹性碰撞就是这样一种碰撞，在碰撞时，粒子的内部情况不改变。假設碰撞前这两个粒子的能量和冲量，在参考系統 K 内各为 $\mathbf{p}_{10}$、$\mathscr{E}_{10}$ 及 $\mathbf{p}_{20}$、$\mathscr{E}_{20}$。同时，我們选擇 K 坐标系統的 X 軸沿着两个粒子的冲量之和 $\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{20}$ 的方向。

为了研究这个碰撞，我們从参考系統 K 变换到另一个参考系統 K' 是便利的，在 K' 内，两个粒子的冲量的和为零。根据(2-7)，K' 相对于 K 的速度 $\mathbf{V}$ 是①

① 这时，我們把两个碰撞的粒子当作一个物体。公式(2-23)也可以直接由变换公式(2-13)求出。根据(2-13)式，并且記起在 K' 中，总冲量为零，則我們有

$$\mathscr{E}_{01}+\mathscr{E}_{02}=\frac{\mathscr{E}'_{01}+\mathscr{E}'_{02}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad p_{01x}+p_{02x}=\frac{\frac{V}{c^2}(\mathscr{E}'_{01}+\mathscr{E}'_{02})}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=$$

$$=\frac{V}{c^2}(\mathscr{E}_{01}+\mathscr{E}_{02}),$$

上式若用矢量形式写出，便是公式(2-23)(加撇之量系指在 K' 系統中的量)。

$$\mathbf{V}=\frac{(\mathbf{p}_{10}+\mathbf{p}_{20})c^2}{\mathscr{E}_{10}+\mathscr{E}_{20}} \tag{2-23}$$

利用普遍变换式(2-13)及公式(2-23)，很容易算出这两个粒子在 K' 中的能量及冲量；我們用 $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$, $\mathbf{p}_1'=-\mathbf{p}_2'$ 来表示它們。

在碰撞中，两个粒子的总冲量及总能量保持不变。在 K' 中，$\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'=0$，就是說，两个冲量大小相等，方向相反。在碰撞中，冲量 $\mathbf{p}_1'$ 及 $\mathbf{p}_2'$ 仅能旋轉，并保持着大小相等，方向相反。由于能量守恒定律，每个粒子的冲量的絕对值保持不变。

現在讓我們比較詳細地考慮一种碰撞，在这个碰撞中，粒子中的一个（第二个）在碰撞前是靜止的(在 K 系統中)。在 K' 系統中，这个在碰撞前有一沿着 x' 軸的速度 $-V$，相应地，也就有冲量 $-\frac{m_2V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$。設 χ 为冲量 $\mathbf{p}_1'$ 及 $\mathbf{p}_2'$ 在 K' 系統中由于碰撞所旋轉之角（在 K' 中之散射角)。既然 $\mathbf{p}'$ 的絕对值經过碰撞后仍然不变，那么，粒子 m_2 經过碰撞后的冲量的 x' 分量就是

$$-\frac{m_2V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cos\chi.$$

粒子 m_2 在 K' 系統中的能量是

$$\mathscr{E}_2'=\frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

利用变换公式(2-13)中的最后一式，由此可求得那个最初静止的粒子經过碰撞后在 K 系統中的能量

$$\mathscr{E}_2=\frac{m_2c^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\cos\chi\right)}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

利用下面形式的公式(2-23):

$$V=\frac{p_{10}c^2}{\mathscr{E}_{10}+m_2c^2}=c\frac{\sqrt{\mathscr{E}_{10}^2-m_1^2c^4}}{\mathscr{E}_{10}+m_2c^2} \qquad (2\text{-}24)$$

(在碰撞前 $p_{20}=0$, $\mathscr{E}_{20}=m_2c^2$), 消去辅助量 V, 我們就可以得到 $\mathscr{E}_2$ 的最后的公式。經过一些初等計算，得

$$\mathscr{E}_2=m_2c^2+\frac{m_2(\mathscr{E}_{10}^2-m_1^2c^4)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}(1-\cos\chi). \qquad (2\text{-}25)$$

上式右边第二项代表第一个粒子在碰撞过程中傳給第二个粒子的能量。只要我們記起两个粒子的总能量在碰撞中是保持不变的，我們就可以直接写出第一个粒子經过碰撞后的能量表示式:

$$\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_{10}-\frac{m_2(\mathscr{E}_{10}^2-m_1^2c^4)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}(1-\cos\chi). \qquad (2\text{-}26)$$

由于碰撞而發生的最大可能的能量轉移是在 $\chi=\pi$ 时。 ε_2 的对应值是

$$\mathscr{E}_{2最大}=m_2c^2+\frac{2m_2(\mathscr{E}_{10}^2-m_1^2c^4)}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}. \qquad (2\text{-}27)$$

这时，第一个粒子的能量将有最小値

$$\mathscr{E}_{1最小}=m_1c^2+\frac{(\mathscr{E}_{10}-m_1c^2)(m_2-m_1)^2c^2}{m_1^2c^2+m_2^2c^2+2m_2\mathscr{E}_{10}}. \qquad (2\text{-}28)$$

在此，我們指出一些这些公式的直接結果。将公式(2-28)写成下面的形式:

$$\frac{\mathscr{E}_{1最小}-m_1c^2}{\mathscr{E}_{10}-m_1c^2}=\frac{(m_1-m_2)^2}{m_1^2+m_2^2+\frac{2}{c^2}m_2\mathscr{E}_{10}},$$

我們看到，在速度甚小$\left(当\ \mathscr{E}\approx mc^2+\frac{mv^2}{2}\ 时\right)$的極限情况下，就得到非相对論力学中熟知的結果，即作碰撞的粒子(第一个粒子)的最小动能同它的最初的动能之比，趋近于一个常数極限 $\frac{(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}$。在相反的極限情况下，当粒子 m_1 的速度接近于 c (即 $\mathscr{E}_{10}$ 很大),

这个比值就趋近于零；而 $\mathscr{E}_{1最小}$ 也趋近于一个常数極限。这个極限是

$$\mathscr{E}_{1最小}=\frac{m_1^2+m_2^2}{2m_2}c^2.$$

假設 $m_2 \gg m_1$，亦即碰撞粒子的質量比靜止粒子的質量小得多。在这种情况下，按照經典力学，輕的粒子所能傳給重的粒子的能量，仅仅是它自己的能量中的微不足道的一部分。但在相对論力学中，并非如此。由(2-28)式可以看出，对于足够大的能量 $\mathscr{E}_{10}$，所能轉移的那一部分能量可能达到它自己的能量的全部。但是，为了讓这种情形發生，仅仅使 m_1 的速度与 c 相近还不够，而显然还必須使

$$\mathscr{E}_{10} \sim m_2c^2,$$

就是說，輕的粒子的能量必須与重的粒子的靜止能相近。

当 $m_2 \ll m_1$ 时，即当一个重的粒子碰撞一个輕的粒子时，也有类似的情况存在。在这种情况下，按照經典力学，也仅仅只有微不足道的一部分能量可能轉移。仅仅从能量

$$\mathscr{E}_{10} \sim \frac{m_1^2}{m^2}c^2$$

起，轉移的能量才开始有显著的值。我們也应該注意到，在此处所要求的不仅仅是速度接近于光速，而还要求能量比 m_1c^2 大得多。

最后，我們来推导粒子在 K 系統中經过碰撞后的散射角(粒子 m_1 对其最初运动方向的偏轉角)与能量变化的各种关系。为了这个目的，我們要注意，对于每个粒子来說，我們都有下列的关系：

$$(p_{i0}-p_i)U_i=0, \tag{2-29}$$

其中 p_{i0} 及 p_i 为粒子在碰撞前及碰撞后的四度冲量，而 U_i 則是四度速度矢量，它的空間分量在 K 系統中与速度 V 相合。事实上，这个等式的左边是一个标量，因此，只須証明这个关系在任何一个参考系統中成立就够了。在 K' 系統中，$U_\alpha=0$，所以 $(p_{i0}-p_i)U_i=$

$=\frac{i}{c}(\mathscr{E}_0-\mathscr{E})$。但是在 K' 中，粒子的能量經过碰撞是不变的，即 $\mathscr{E}_0=\mathscr{E}$，这就証明了关系式(2-29)。

首先，我們把(2-29)式应用到原来静止的粒子 m_2 上。設 θ_2 是这个粒子在 K 系統中的散射角。这时，将矢量 $p_{i0}^{(2)}$, $p_i^{(2)}$, U_i 在 K 系統中的分量的值代入，得到

$$\mathscr{E}_2-m_2c^2=Vp_2\cos\theta_2,$$

或将(2-24)式中的 V 代入得到

$$\cos\theta_2=\frac{(\mathscr{E}_{10}+m_2c^2)(\mathscr{E}_2-m_2c^2)}{p_{10}p_2c^2}. \tag{2-30}$$

同理，将(2-29)式应用到作碰撞的粒子，得到

$$\mathscr{E}_{10}-\mathscr{E}_1=V(p_{10}-p_1\cos\theta_1), \tag{2-31}$$

将 V 的表示式代入此式，得到

$$\cos\theta_1=\frac{\mathscr{E}_1(\mathscr{E}_{10}+m_2c^2)-\mathscr{E}_{10}m_2c^2-m_1^2c^4}{p_{10}p_1c^2}. \tag{2-32}$$

公式(2-30)及(2-32)解决了我們提出的問題。我們注意到，假如 $m_1>m_2$，那就是作碰撞的粒子重于静止的粒子，那么，散射角就不可能超过某一个最大值。經过一些初等的計算，很容易得到这个最大值的公式如下：

$$\sin\theta_{1\text{最大}}=\frac{m_2}{m_1},$$

这与經典力学的結果完全一样①。

假如碰撞粒子的質量为零，因而其速度为光速，公式(2-30)及(2-32)就簡化了。設 $m_1=0$，$p_{10}=\frac{\mathscr{E}_{10}}{c}$，$p_1=\frac{\mathscr{E}_1}{c}$，我們得到：

$$\cos\theta_1=\frac{\mathscr{E}_1(\mathscr{E}_{10}+m_2c^2)-\mathscr{E}_{10}m_2c^2}{\mathscr{E}_{10}\mathscr{E}_1}, \tag{2-33}$$

$$\cos\theta_2=\frac{(\mathscr{E}_{10}+m_2c^2)(\mathscr{E}_2-m_2c^2)}{\mathscr{E}_{10}p_2c}. \tag{2-34}$$

① 例如，参看本教程第一卷"力学"，§ 17。

§2-6. 冲量矩

大家知道，經典力学导致这样一个結果，那就是在一个閉合系中，除了能量守恒及冲量守恒以外，还有冲量矩守恒，即矢量

$$\mathbf{M}=\Sigma\, \mathbf{r}\times\mathbf{p}$$

守恒，其中 $\mathbf{r}$ 及 $\mathbf{P}$ 为各粒子的矢徑及冲量；求和是对組成这个体系的所有粒子进行。冲量矩守恒定律是下面这个事实的結果：由于空間的各向同性，一个閉合系的拉格朗日函数，在整个体系旋轉时，并不改变。

在四度空間內經过类似的推导，我們就会得到冲量矩的相对論的表示式。設 x_i 为体系中某一粒子的坐标。我們在四度空間內作一个无穷小的旋轉，則每一个粒子的坐标 x_i，經受一綫性变换

$$x_i'=x_i+x_k\delta\Omega_{ik}, \tag{2-35}$$

变为 x_i'，其中 $\delta\Omega_{ik}$ 是决定旋轉的一个无穷小的四度張量。經过旋轉，矢徑的長度 x_i^2 应当保持不变，即 $x_i^2=x_i'^2$。將(2-35)代入本式，略去为高阶无穷小的 $\delta\Omega_{ik}$ 的二次項，則得

$$x_ix_k\delta\Omega_{ik}=0.$$

这个方程必須对于任意的 x_i 都能滿足。因为 x_ix_k 是一个对称張量，所以 $\delta\Omega_{ik}$ 必然是一个反对称張量(一个对称張量与一个反对称張量的乘积显然恒等于零)。因之，我們得到

$$\delta\Omega_{ki}=-\delta\Omega_{ik}. \tag{2-36}$$

对于坐标的无穷小的变化，作用量 S 之变分 δS 依(2-9)式有下面的形式：

$$\delta S=\Sigma\, p_i\delta x_i$$

(这里是对体系中所有的粒子求和)。在我們現在所考慮的旋轉情况下，$\delta x_i=\delta\Omega_{ik}x_k$，故

$$\delta S=\delta\Omega_{ik}\Sigma\ p_i x_k.$$

假如我們将張量 $\Sigma\ p_i x_k$ 分解为对称与反对称两部分，那么，第一部分与反对称張量 $\delta\Omega_{ik}$ 的乘积，恒等于零。所以，只取 $\Sigma\ p_i x_k$ 的反对称部分，我們可将上式写成下面的形式：

$$\delta S=\delta\Omega_{ik}\frac{1}{2}\sum(p_i x_k-p_k x_i).\tag{2-37}$$

由于空間与时間的各向同性，閉合系的拉格朗日函数不因在四度空間中旋轉而改变，就是說，这个旋轉参数 $\delta\Omega_{ik}$ 是循环坐标。因此，与之相应的广义冲量是守恒的。这些广义的冲量就是 $\frac{\delta S}{\delta\Omega_{ik}}$。由(2-37)，我們得到

$$\frac{\delta S}{\delta\Omega_{ik}}=\frac{1}{2}\sum(p_i x_k-p_k x_i),$$

因而，我們看出，对于一个閉合系来說，張量

$$M_{ik}=\Sigma(x_i p_k-x_k p_i)\tag{2-38}$$

是守恒的。这个反对称張量称为四度冲量矩張量。

很容易証明，这个張量的空間分量 $(i, k=1, 2, 3)$ 是三度空間的冲量矩矢量的三个分量：

$$\mathbf{M}=\Sigma\ \mathbf{r}\times\mathbf{p},$$

$$M_{zx}=-M_{xz}=M_y,\quad M_{xy}=-M_{yx}=M_z,$$

$$M_{yz}=-M_{zy}=M_x.\tag{2-39}$$

至于分量 $M_{4\alpha}(\alpha=1, 2, 3)$，那么很容易証明，

$$M_{4\alpha}=ic\sum\left(tp_\alpha-\frac{\mathscr{E}x_\alpha}{c^2}\right).\tag{2-40}$$

因而，这三个分量构成一个矢量 $ic\,\Sigma\left(t\mathbf{p}-\frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2}\right)$。

因为閉合系的 M_{ik} 是守恒的，所以我們有，例如

$$\sum\left(t\mathbf{p}-\frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2}\right)=\text{常数}.$$

另一方面，既然总能量 $\Sigma\,\mathscr{E}$ 也是守恒的，这个等式就可以写成下面

的形式：

$$\frac{\sum \mathscr{E}\mathbf{r}}{\sum \mathscr{E}}-\frac{c^2\sum \mathbf{p}}{\sum \mathscr{E}}t=\text{常数}. \tag{2-41}$$

由此可見，如果一点的矢徑是

$$\mathbf{R}=\frac{\sum \mathscr{E}\mathbf{r}}{\sum \mathscr{E}}, \tag{2-42}$$

这个点将以速度

$$\mathbf{V}=\frac{c^2\sum \mathbf{p}}{\sum \mathscr{E}} \tag{2-43}$$

作等速运动，这个速度就是这个体系整体运动的速度。我們知道，这个点就是慣性中心；公式(2-42)决定相对論中的慣性中心的坐标。但是，应該注意，既然由公式(2-42)所决定的 R 的分量并非任何四度矢量的分量，所以当变换到另一参考系統时，慣性中心的坐标并不按照洛倫茲变换而变换。假如所有粒子的速度都比 c 小得多，那么，我們可以近似地讓 $\mathscr{E}=mc^2$，而(2-42)則过渡到慣性中心的一般的表示式。

習 題

在参考系統 K 中，粒子体系作为一个整体的运动速度是 V（沿着 X 軸的方向），它的冲量矩（对于选在体系慣性中心的坐标原点而言）为 $\mathbf{M}$。求在 K_0 系統中的冲量矩 $\mathbf{M}_0$，在 K_0 系統中，粒子体系作为一个整体是靜止的。

解：張量分量的变换，象矢量的相应分量之乘积的变换一样。既然按照洛倫茲变换(2-26)，四度矢量的 y 与 z 分量是不变的，所以分量 M_{xy} 及分量 M_{xz}（冲量矩張量的分量）所作的变换象四度矢量的 x 分量一样；而分量 M_{yz} 就完全不变了。为了进行由 k 系統到 k_0 系統的变换，我們应該注意到，在 k 系統中，$M_{4y}=M_{4z}=0$（实际上，因为我們选擇慣性中心作为坐标原点，所以 $\Sigma\mathscr{E}y=\Sigma\mathscr{E}z=0$；因为速度 V 是沿着 X 軸，所以 $\Sigma p_y=\Sigma p_z=0$）。

經过变換，結果我們得到

$$M_{0x}=M_x,\ M_{0y}=\frac{M_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\qquad M_{0z}=\frac{M_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

对于冲量矩的絕对值，我們有

$$M_0^2=M_x^2+\frac{M_y^2+M_z^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

第三章　場中的电荷

§3-1. 場的四度勢

粒子与粒子間的相互作用，可以利用力場的概念来描述。就是，我們不說一个粒子作用于另一个粒子，而說粒子在它自己周圍建立起場；在这个場内的任何其他粒子都受一定的力作用。在經典力学中，場仅仅是描述粒子的相互作用这一物理現象的一种方法。在相对論中，因为相互作用是以有限速度傳播的，情况就根本改变了。在某一个瞬間，作用在一个粒子上的力并不由这个粒子在該瞬間的位置所决定。粒子中的一个改变了位置，仅仅經过某一段时間以后方能影响到别的粒子。这就是說，場本身具有物理的眞实性。我們不可以說，彼此間有距离的粒子直接地相互作用。在每一瞬間的相互作用仅能發生在空間中的紧密相邻的各点間（接触作用）。所以，我們应該說，一个粒子同場相互作用，說場与另一个粒子相互作用。

我們将研究两种形态的場：引力場与电磁場。关于引力場，我們留到第十章及第十一章再研究，在其余各章內，我們只討論电磁場。

一个給定的电磁場同某一个粒子的相互作用被描述該粒子特征的一个量所决定。这个量称为粒子的电荷。場与粒子的相互作用是与粒子的电荷成比的。电荷可能为正，也可能为負。值得注意的是，它也可能为零。在后一情况下，我們說粒子不带电，以区别于带电粒子。应該注意，到目前为止我們还沒有任何公式联系

着电荷同已經知道的量，所以我們可以任意选擇电荷的單位。

在 § 2-2 中，我們已經知道了，一个自由粒子的作用量 $S=-mc\int_a^b ds$。假如带电粒子(以后我們簡称为电荷)位于場内，則我們必須在这个积分项上加一个补充项，用来描述場与这个粒子的相互作用。这一项必须包含描述粒子特征的一些量(特别是它的电荷 e)，以及描述場的特征的一些量。这一项有如下的形式:

$$\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx_i.$$

在这里，为了便利起見，我們引进了光速 c; 在积分号的前面我們不能写出任何其他常数，因为电荷的單位还沒有选定。四度矢量 A_i 描述电磁場的特征; 它的分量一般来說都是坐标及时間的函数。矢量 A_i 称为場的四度势。因之，电磁場中电荷的作用量函数将有如下的形式:

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}A_k dx_k\right). \tag{3-1}$$

应該注意，当电荷 e 的單位可以任意选擇时，A_i 的單位也是任意的。

A_i 的三个空間分量构成一个三度空間矢量 $\mathbf{A}$，称为場的矢势，四度矢量 A_i 的时間分量是虛数，并有 $A_4=i\varphi$ 的形式。实量 φ 称为場的矢势。因此，

$$A_{1,2,3}=A_{x,y,z},\ A_4=i\varphi. \tag{3-2}$$

所以作用量积分可以写为下式:

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}-e\varphi\,dt\right).$$

其次，$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{V}$，其中 $\mathbf{V}$ 是粒子的速度。所以，作用量将有如下的形式：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}-e\varphi\right)dt. \tag{3-3}$$

这个被积分函数不是别的，就是一个电荷在电磁場中的拉格朗日函数：

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}-e\varphi. \tag{3-4}$$

这个函数与一个自由粒子的拉格朗日函数（2-2）相差之項是 $\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}-e\varphi$，这就是描述电荷与場的相互作用的一項。

导数 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ 是粒子的广义冲量；我們用 $\mathbf{P}$ 来代表它。微分可得

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{3-5}$$

这里我們用 $\mathbf{p}$ 代表这个粒子的普通冲量，以后我們簡称之为冲量。

由拉格朗日函数，按照熟知的普遍公式

$$\mathscr{H}=\mathbf{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}-L,$$

我們可以求出一个粒子在場內的哈密頓函数。

将(3-4)代入，我們得到

$$\mathscr{H}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+e\varphi. \tag{3-6}$$

但是，哈密頓函数不应該用速度来表示，而应該用粒子的广义冲量来表示。将 $\mathscr{H}-e\varphi$ 平方，再与由(3-5)求得的 $\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$ 比較，我們得到关系式

$$\left(\frac{\mathscr{H}-e\varphi}{c}\right)^2=m^2c^2+\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{3-7}$$

或者
$$\mathscr{H}=\sqrt{m^2c^4+c^2\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}+e\varphi. \tag{3-8}$$

对于小的速度，即是說在經典力学中，拉格朗日函数(3-4)化为

$$L=\frac{mv^2}{2}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}-e\varphi. \tag{3-9}$$

在这种近似情况下，$\mathbf{p}=m\mathbf{V}=\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}$，并且我們可求得哈密頓函数的下面的表示式：

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi. \tag{3-10}$$

最后，我們来写电磁場中一粒子的哈密頓-雅科畢方程。在哈密頓函数中，用 $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}$ 代替 $\mathbf{P}$，用 $-\frac{\partial S}{\partial t}$ 代替 $\mathscr{H}$，就可得到这个方程。因此，由(3-7)，我們得到

$$\left(\nabla S-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2+m^2c^2=0. \tag{3-11}$$

§3-2. 場中一个电荷的运动方程

位于場内的电荷不只受到場的作用力，而且也反过来对場起作用，改变場。所以，严格地說，一个被置于外場中的粒子，它所受的作用，是已經被它改变了的場的作用。但是，假如电荷 e 不大，电荷对于場的作用，就是場因电荷而起的变化，也就可以略去不計。在这种情況下，当我們考慮电荷在一給定的場內运动时，我們可以假設場本身与电荷的坐标或速度无关。要能够把电荷認为是在上述意义上的小，它所应該滿足的准确的条件将在以后講述（見§9-9）。以下我們假設这个条件已被滿足。

我們現在要找出一个电荷在一个已知的电磁場內的运动方程。变分作用量积分，我們就能得到这个方程。因而，运动方程就是普通的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{3-12}$$

其中 L 由公式(3-4)确定。

导数 $\partial L/\partial \mathbf{V}$ 是粒子的广义冲量(3-5)。其次，我們可写出

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c} \operatorname{grad} \mathbf{A}\cdot\mathbf{V} - e \operatorname{grad} \varphi.$$

但是由已知的矢量分析的公式可得

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

其中 $\mathbf{a}$ 及 $\mathbf{b}$ 是两个任意矢量。应用这个公式到 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}$，并記住，对 $\mathbf{r}$ 微分时，$\mathbf{V}$ 是常数，如是，則我們求得

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} - e \operatorname{grad}\varphi.$$

因此，拉格朗日方程具有如下的形式：

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{e}{c}(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} - e\operatorname{grad}\varphi.$$

但是全微分 $\frac{d\mathbf{A}}{dt}dt$ 包含两部分：矢势在空間的某一給定点因时間变化而發生的变化 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}dt$ 以及由空間的一点移动一段距离 $d\mathbf{r}$ 至另一点所發生的变化。从矢量分析知道，第二部分是$(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}$。因此导数 $d\mathbf{A}/dt$ 可以写成以下的形式：

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{A}.$$

将此式代入前面的方程，我們得到

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\operatorname{grad}\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (3\text{-}13)$$

这就是一个粒子在电磁場内的运动方程。在等号左边的是粒子的冲量对时間的微分。所以在(3-13)的右边的式子就是作用于在电磁場内的粒子上的力。我們看出，这个力包含两部分。第一部分[(3-13)式右边的第一，第二两項]与粒子的速度无关。第二部分(第三項)与速度有关，它与速度成正比，而且垂直于速度。

作用于單位电荷上的第一种类型的力，称为电場强度；我們用

E 来代表它。于是，按定义，

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi. \tag{3-14}$$

作用于單位电荷上的第二种类型的力中，速度的因子，严格說来是 $\mathbf{V}/c$ 的因子，称为磁場强度。我們用 H 来代表它。于是，按定义，

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{3-15}$$

假如在一电磁場中，$\mathbf{E}\neq 0$，但 $\mathbf{H}=0$，我們就說它是电場；假如 $\mathbf{E}=0$，但 $\mathbf{H}\neq 0$，我們就說它是磁場。在一般情况下，电磁場是电場与磁場的叠加。

一个电荷在电磁場中的运动方程现在可以写成

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}. \tag{3-16}$$

等号右边的式子称为洛倫兹力。其第一部分（电場作用于电荷上的力）与电荷速度无关，并沿着 E 的方向。第二部分（磁場作用于电荷上的力）与电荷的速度成正比，而其方向则既垂直于速度又垂直于磁場 H。

对于比較光速小很多的速度，冲量 p 近似地等于它的經典表示式 $m\mathbf{V}$，因而运动方程(3-16)变为

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}. \tag{3-17}$$

这样一来，我們可以認为場內运动的粒子遵从經典力学(就是說它的动能为 $m\ ^2/2$，冲量为 $m\mathbf{V}$)。

下面我們还要导出确定粒子的动能随时間的变化的方程，即确定下面导数的方程，

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

很容易証实，

$$d\mathscr{E}_{\text{кин}}=\mathbf{V}\cdot d\mathbf{p},$$

因而
$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=\mathbf{V}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt};$$

将(3-16)式中的 $d\mathbf{p}/dt$ 代入，得到
$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=e\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}. \tag{3-18}$$

（注意，$(\mathbf{V}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{V}=(\mathbf{V}\times\mathbf{V})\cdot\mathbf{H}=0$）。

动能随时間的变化就是場在單位时間內对粒子所作的功。从(3-18)可以看出，这个功等于速度与力的乘积，这个力就是电場作用于电荷上的力。場在时間 dt 內所作的功，即在电荷移动 $d\mathbf{r}$ 距离时所作的功，显然等于 $e\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$。

我們强調这个事实即对电荷作功的仅仅是电場；磁場不能对在其中运动的电荷作功。这是因为磁場对电荷的作用力永与电荷的速度垂直。

習　題

用粒子的速度及电場强度和磁場强度来表示它的加速度。

解：将 $\mathbf{p}=\mathbf{V}\mathscr{E}_{\text{кин}}/c^2$ 代入(3-16)，并按(3-18)表示 $d\mathscr{E}_{\text{кин}}/dt$，結果我們求得
$$\dot{\mathbf{V}}=\frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}-\frac{1}{c^2}\mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E})\right\}.$$

§ 3-3. 时間的各向同性

力学方程相对于时間变号或相对于将来与过去对調来說是不变的。換句話說，在力学中两个时間方向是等价的，即时間是各向同性的。这就意味着，假如某一种运动能按照力学方程进行，那么，相反的运动也是可能的，在这个相反的运动中，力学体系經过同样的状态，但是次序相反。

很容易看出，在相对論中的电磁場內这也是成立的。但是在这种情况下，除了将时間 t 变为 $-t$ 外，我們还必須变磁場的符

号。事实上，很容易看出，假如我們作下列代换：

$$t \to -t,\ \mathbf{E} \to \mathbf{E},\ \mathbf{H} \to -\mathbf{H}, \qquad (3\text{-}19)$$

运动方程(3-16)是不变的。

按照(3-14)及(3-15)，这并不改变标势，但是矢势变了号：

$$\varphi \to \varphi,\quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}. \qquad (3\text{-}20)$$

因此，假如某种运动在电磁場中是可能的，那么，相反的运动在有与 **H** 相反之方向的电磁場中也是可能的。

§ 3-4. 規范不变性

現在讓我們来研究，唯一地确定場的势可到什么程度。首先，我們应該注意这个事实，就是場的特征是它对在場內的电荷的运动所产生的影响。但是在运动方程(3-16)內我們并未發現势，而只發現有場强 **E** 及 **H**。所以两个場如果以相同两个矢量 **E** 及 **H** 来描述其特征，那么，这两个場在物理学上是全同的。

假如給定了势 **A** 及 φ，那么，势根据(3-14)及(3-15)，**E** 及 **H** 就由它們完全唯一地确定了。但是同一个場可以相应于不同的势。为了証明这件事，讓我們将这个量 $\partial f/\partial x_k$ 加到势的每一个分量上，其中 f 是坐标与时間的任意函数。因此，A_k 变为

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x_k}. \qquad (3\text{-}21)$$

經过这样的改变，在作用量积分(3-1)中将出現附加項

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x_k}\,dx_k = \frac{e}{c}\,df.$$

但是，将一个全微分加在作用量积分的被积分函数內，运动方程并不受影响。①

① 对某一个函数的全微分积分后，显然得到的是函数在两个积分限之值的差，这个差乃是一个常数。对积分取变分时，这个常数消失。

假如我們引入标势及矢势来代替四度势，而且用x, y, z, t来代替x^i，那么(3-21)中的四个方程就可以写成下面的形式：

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3-22}$$

很容易証实，当用由(3-22)式所定义的$\mathbf{A}'$及φ'代替$\mathbf{A}$及φ时，由(3-14)及(3-15)所定义的电場及磁場实际上并不改变。因此，势的变换(3-22)幷不改变場。所以势幷沒有被唯一地确定，确定矢势仅仅准确到一个任意函数的梯度，而确定标势仅仅准确到同一个任意函数的时間导数。

既然如此，我們显然可以加一个任意的常矢量到矢势上，加一个任意常数到标势上。这也可直接由这个事实看出来，$\mathbf{E}$及$\mathbf{H}$仅仅包含$\mathbf{A}$及φ的导数，所以加些常量到$\mathbf{A}$及φ上，幷不影响場的强度。

仅仅那些对于势变换(3-22)为不变的量才有物理义意；就特殊情形言之，所有方程在这个变換下必須是不变的。这种不变性称为規范不变性①(德文为Eichinvarianz，英文为Gauge invariance)。

因为势缺乏惟一性，我們就有可能去选擇它們，使它們滿足我們所选擇的附加条件(势之間的关系)。我們强調指出，能够使它們滿足一个条件，因为我們可以任意选擇(3-22)中的函数f。就特殊情形言之，我們总能这样来选擇这些势，使标势为零。假如矢势不是零，那么，一般来說，我們不可能使它为零，因为$\mathbf{A}=0$的这个条件代表三个附加条件(即$\mathbf{A}$的三个分量的条件)。

§3-5. 恒定电磁場

所謂恒定电磁場就是一个与时間无关的电磁場。显然，恒定

---

① 这个名字(指俄文名字Градиентная инвариантность——譯者)是B. A. 福克取的。

电磁場的势可以这样选擇，使它們仅仅是坐标的函数，而不是时間的函数。恒定磁場，按照(3-15)，仍旧等于 $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$。按照(3-14)，恒定电場等于

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi. \tag{3-23}$$

因此，一个恒定电場仅为标势所决定，而一个恒定磁場仅为矢势所决定。

我們在前一节中已經知道，各种势并未被唯一地确定。但是很容易相信，假如我們用各种势来描述恒定电磁場，而且这些势又与时間无关，那么，我們可以在标势上加一个任意常数，而不改变場，这个任意常数既不能与坐标有关，也不能与时間有关。通常要給加上一个附加条件，要 φ 在空間內某一个特定点有一个一定的值；常常規定 φ 中在无穷远处的值为零。这时，上面所說的任意常数就被确定了，因而恒定場的标势也就被唯一地确定了。

反之，即使对于恒定电磁場，矢势也还是沒有被唯一地确定；就是說，我們可以把坐标的一个任意函数的梯度加到矢势上。

現在我們要确定一个电荷在恒定电磁場內的能量。既然場是恒定的，那么，电荷的拉格朗日函数也就不是时間的显函数。如我們所知道的，在这种情况下，能量是守恒的，而且与哈密頓函数相合。

按照(3-6)，我們得到

$$\mathscr{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+e\varphi. \tag{3-24}$$

因之，由于場的存在，粒子的能量加上了一項 $e\varphi$，后者就是电荷在場內的势能。我們应該注意一个重要的事实，能量仅与标势有关，而与矢势无关。由于公式 $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ 及(3-23)，这就意味着磁場不影响电荷的能量。只有电場才改变粒子的能量。这是同在

§3-2 末尾已經提过的那件事实有关系的，即磁場与电場不同，对电荷不作功。

假如場强在空間所有点上都是一样，那么这样的場称为均匀場。讓我們用場强 $\mathbf{E}$ 来表示一个均匀电場的标势。很容易証明，对于一个均匀場来說，

$$\varphi = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}, \tag{3-25}$$

因为 $\mathbf{E}$ 是常量，所以 $-\text{grad}\ \varphi = \text{grad}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{r} + \mathbf{E}\times\text{rot}\ \mathbf{r} = \mathbf{E}$（应記起 $\text{rot}\ \mathbf{r}=0$）。

我們現在用場强 $\mathbf{H}$ 来表示一个均匀磁場的矢势。很容易証明，矢势 $\mathbf{A}$ 可以写成下式：

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\times\mathbf{r}. \tag{3-26}$$

事实上，我們注意到 $\mathbf{H}=$常数，利用矢量分析中熟知的公式可得到

$$\text{rot}\ (\mathbf{H}\times\mathbf{r}) = \mathbf{H}\ \text{div}\ \mathbf{r} - (\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

（注意，$\text{div}\ \mathbf{r}=3$）。

例如，对均匀磁場的矢势可以作另外的选擇，例如选擇成下列的形式：

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0 \tag{3-27}$$

（选擇 Z 軸沿着 $\mathbf{H}$ 的方向）。很容易証明，这样选擇了 $\mathbf{A}$，我們就有 $\mathbf{H}=\text{rot}\ \mathbf{A}$。

習　題

在相对論力学中，写出恒定电磁場内粒子軌道的变分原理（即莫培督原理）。

解： 在力学中已經知道，莫培督原理可表述如下：假如一个粒子的能量是守恒的（在一个恒定場内运动），那么，它的軌道可从下面的变分方程确定：

$$\delta\int \mathbf{P}\cdot d\mathbf{r} = 0,$$

其中 $\mathbf{P}$ 是粒子的广义冲量，这个广义冲量 $\mathbf{P}$ 又可以用能量及坐标的微分来表示；至于积分就应该沿粒子的軌道进行。将 $\mathbf{P}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ 代入，注意 $\mathbf{p}$ 与 $d\mathbf{r}$ 同方向，我們就

得到

$$\delta\int\left(p\,dl+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}\right)=0,$$

其中 $dl=\sqrt{d\mathbf{r}^2}$ 是弧元。从 $p^2+m^2c^2=\left(\frac{\mathscr{E}-e\varphi}{c}\right)^2$ 来定 p, 我們最后得到

$$\delta\int\left\{\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}-e\varphi}{c}\right)^2-m^2c^2}\,dl+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}\right\}=0.$$

§3-6. 在恒定均匀电場中的运动

現在我們研究一个电荷 e 在一个均匀的恒定电場 $\mathbf{E}$ 中的运动。我們取电場的方向作为 X 軸。假如初速（当 $t=0$ 时的速度）是 $\mathbf{V}_0$, 那么，电荷将永远在通过 $\mathbf{E}$ 与 $\mathbf{V}_0$ 的平面内运动。我們取这个平面为 xy 平面。这时，运动方程(3-16)，即

$$\dot{\mathbf{p}}=e\mathbf{E}.$$

（$\mathbf{p}$ 上面的一点表示对时間 t 的微分），将取下面的形式：

$$\frac{dp_x}{dt}=eE,\qquad \frac{dp_y}{dt}=0;$$

因而

$$p_x=eEt,\qquad p_y=p_0. \tag{3-28}$$

我們把时間的計算起点（即 $t=0$ 的时刻）选擇在 $p_x=0$ 的瞬間，粒子在該瞬間的冲量用 p_0 表示。

粒子的动能 $\mathscr{E}$（除場内的势能以外的能量），从(2-15)得知为 $\mathscr{E}=c\sqrt{m^2c^2+p^2}$。将(3-28)代入，我們求得，在現在这种情况下，

$$\mathscr{E}=\sqrt{m^2c^4+c^2p_0^2+(ceEt)^2}\,.$$

按照(2-7)式，粒子的速度 $\mathbf{V}=\mathbf{p}c^2/\mathscr{E}$。因而，在現在这种情况下，对于速度 $v_x=\dot{x}$, 我們有

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c^2eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

其中 $\mathscr{E}_0=c\sqrt{m^2c^2+p_0^2}$ 是在 $t=0$ 时的能量。經过积分，我們求得

$$x=\frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}. \tag{3-29}$$

其中我們已經命积分常数等于零。

为了求得 y，我們有

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p_y c^2}{\mathscr{E}}=\frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

从而

$$y=\frac{p_0 c}{eE}\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}\right). \tag{3-30}$$

通过 y 来表示 t（利用 3-30 式），并将它代入(3-29)，我們得到軌道方程如下：

$$x=\frac{\mathscr{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0 c}. \tag{3-31}$$

由此可見，在均匀电場中，一个电荷沿着悬鏈綫运动。

假如粒子的速度 $v\ll c$，那么，我們可以使 $p_0=mv_0$，$\mathscr{E}_0=mc^2$，并将(3-31)式中的 $\operatorname{ch}eEy/p_0c$ 展开为 $1/c$ 的冪級数。略去 $1/c$ 的高次項，我們得到

$$x=\frac{eE}{2mv_0^2}y^2, \tag{3-32}$$

就是說，电荷沿着拋物綫运动，这就是我們在經典力学中熟知的結果。

§ 3-7. 在恒定均匀磁場中的运动

我們現在来研究一个电荷 e 在恒定均匀磁場 $\mathbf{H}$ 中的运动。我們选擇磁場的方向为 Z 軸的方向。我們将表示冲量的式公 $\mathbf{p}=\frac{\mathscr{E}\mathbf{V}}{c^2}$［即(2-7)，式中 $\mathscr{E}$ 是粒子的能量，从 § 3-5 已經知道，它在磁場中是一个常数］代入运动方程

$$\dot{\mathbf{p}}=\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H},$$

就可将运动方程改写成另一形式，这样一来，运动方程就化成了下面的形式：

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}, \tag{3-33}$$

或用分量表示为

$$\dot{v}_x=\omega v_y,\quad \dot{v}_y=-\omega v_x,\quad \dot{v}_z=0,\tag{3-34}$$

其中我們引入了符号

$$\omega=\frac{ecH}{\mathscr{E}}.\tag{3-35}$$

我們将(3-34)中的第二个方程乘以 i，加到第一个方程中，就得到

$$\frac{d}{dt}(v_x+iv_y)=-i\omega(v_x+iv_y),$$

因而
$$v_x+iv_y=ae^{-i\omega t},$$

其中 a 是一个复常数。这个复常数可以写成 $a=v_{0t}e^{-i\alpha}$ 这样的形式，其中 v_{0t} 及 α 都是实数。因此，

$$v_x+iv_y=v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)},$$

将实数与虚数分开，我們得到

$$v_x=v_{0t}\cos(\omega t+\alpha),\quad v_y=-v_{0t}\sin(\omega t+\alpha).\tag{3-36}$$

常数 v_{0t} 及 α 都要由起始条件来决定，α 是初位相，至于 v_{0t}，那么从(3-36)看出

$$v_{0t}=\sqrt{v_x^2+v_y^2},$$

即是說，v_{0t} 是粒子在 XY 平面内的速度，而且它在整个运动过程中保持不变。

再次积分(3-36)，我們得到

$$x=x_0+r\sin(\omega t+\alpha),\quad y=y_0+r\cos(\omega t+\alpha),\tag{3-37}$$

其中
$$r=\frac{v_{0t}}{\omega}=\frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ecH}=\frac{cp_t}{eH}\tag{3-38}$$

(p_t 是冲量在 XY 平面上的投影)。从(3-34)中的第二个方程，我們得到 $v_z=v_{0z}$，以及

$$z=z_0+v_{0z}t,\tag{3-39}$$

x_0, y_0, z_0 是粒子的起始坐标。

从(3-37)及(3-39)，很明显地可以看出，这个电荷在均匀磁場

中沿着螺旋綫运动，螺旋綫的軸是沿着磁場的方向，螺旋綫的半徑由（3-38）式来决定。粒子的速度是常数。在 $v_{0z}=0$ 的特殊情况下，那就是說，粒子沒有沿磁場方向的速度分量，粒子就在与磁場垂直的平面內作圓周运动。

从上面各公式，我們可以看出，ω 是粒子在与磁場垂直的平面內旋轉的角頻率。

假如粒子的速度很低，那么，我們就可以近似地命 $\mathscr{E}=mc^2$。这时頻率 ω 变为

$$\omega=\frac{eH}{mc}. \tag{3-40}$$

習 題

1．将一个带电的空間振子置于均匀恒定磁場內；这个振子在沒有置于場內时的振动的本征頻率是 ω_0，求它在置于場內后的振动頻率。

解：振子在磁場（磁場方向沿着 Z 軸）內的强迫振动方程是

$$\ddot{x}+\omega_0 x=\frac{eH}{mc}\dot{y},\quad \ddot{y}+\omega_0^2 y=-\frac{eH}{mc}\dot{x},\quad \ddot{z}+\omega_0^2 z=0.$$

用 i 乘第二个方程并与第一个方程相加，得到

$$\ddot{\zeta}+\omega_0^2\zeta=-i\frac{eH}{mc}\dot{\zeta},$$

其中 $\zeta=x+iy$。由此可以得到振子在与磁場垂直的平面內的振动頻率为

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}\pm\frac{eH}{2mc}.$$

假如磁場 H 很弱，这个公式就变为 $\omega_0 \pm eH/2mc$。沿着場的方向的振动将保持不变。

2．一个在磁場中的带电粒子当磁場緩慢变化时它的运动如何变化？

解：我們知道，在运动条件緩慢变化的情况下，所謂浸渐不变量①（Адиабатический инвариант）是不变的。因为在与磁場垂直的平面內的运动是周期性的，所以积分

$$I=\oint \mathbf{P}_t\cdot d\mathbf{r}$$

---

① 浸漸不变量，英文名是 adiabatic invariant。按照浸漸原理（adiabatic principle），假如緩慢地改变外在条件（就是对于力学体系干扰），能量一般就会改变，但是相积分（phase integral）保留原値（讀者可参考 M. Born: Atomic physics, 108—111 頁）——譯者注。

是浸漸不变量，这个积分应該在运动的整个周期内来积。在我們所討論的情形下，就是沿着一个圆来积（$\mathbf{P}_t$ 是广义冲量在这个平面上的投影）。将 $\mathbf{P}_t=\mathbf{p}_t+\frac{e}{c}\mathbf{A}$ 代入，就得到

$$I=\oint \mathbf{P}_t\cdot d\mathbf{r}=\oint \mathbf{p}_t\cdot d\mathbf{r}+\frac{e}{c}\oint \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}.$$

在第一项中我們应注意 $\mathbf{p}_t$ 的絕对值是常数，其方向是沿着 $d\mathbf{r}$，对第二項应用斯托克斯定理，则得

$$I=2\pi r p_t+\frac{e}{c}H\pi r^2,$$

其中 r 是軌道的半徑。将 $r=cp_t/eH$［見(3-38)］代入，就得到

$$I=\frac{3\pi c p_t^2}{eH}.$$

由上式可以看出，当 H 变动时，切向冲量 p_t 的变动与 $\sqrt{H}$ 成比例（因 I 是不变的）。至于沿着 $\mathbf{H}$ 方向的冲量 p_z，假如磁場的变动并不引起一个与 $\mathbf{H}$ 平行的电場（例如，在一个螺旋管内的磁場变动），那么，很明显，p_z 并不变动。

§3-8. 电荷在均匀恒定的电場和磁場中的运动

最后，我們来研究在电場及磁場都存在并且都是均匀的恒定的这种情况下，一个电荷运动。我們的討論只限于粒子的速度 $v\ll c$ 的情形，因此質点的冲量 $\mathbf{p}=m\mathbf{V}$；以后我們将要知道，出現这种情形的必要条件是电場較磁場小得多。

我們选擇 $\mathbf{H}$ 的方向为 Z 軸的方向，而选擇通过 $\mathbf{H}$ 及 $\mathbf{E}$ 的平面为 YZ 平面。这时，运动方程

$$m\dot{\mathbf{V}}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}$$

可以写如下式：

$$m\ddot{x}=\frac{e}{c}\dot{y}H,\quad m\ddot{y}=eE_y-\frac{e}{c}\dot{x}H,\quad m\ddot{z}=eE_z. \tag{3-41}$$

由上面的第三个方程，我們可以看出，电荷以等加速度沿着 Z 軸方向运动，就是說，

$$z=\frac{eE_z}{2m}t^2+v_{0z}t. \tag{3-42}$$

用 i 乘(3-41)中的第二个方程，再与第一个方程相加，我們得到

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+i\dot{y})+i\omega(\dot{x}+i\dot{y})=i\frac{e}{m}E_y$$

$(\omega=eH/mc)$。将 $\dot{x}+i\dot{y}$ 当作未知量，上面方程的积分就等于上面的方程略去右边項的积分与該方程保留右边項的一个特别积分的和。第一个积分是 $ae^{-i\omega t}$. 第二个积分是 $eE_y/m\omega=cE_y/H$。因此，

$$\dot{x}+i\dot{y}=ae^{-i\omega t}+\frac{cE_y}{H}.$$

常数 a 一般来說是个复数。将 a 写成 $a=be^{i\alpha}$ 的形式，其中 b 及 α 为实数，我們可以看出，既然 a 被 $e^{-i\omega t}$ 乘了，那么，只要我們选择时間計算起点得当，就可以賦予位相 α 以任何一个値。我們适当选择时間計算起点，使 a 为实数。将 $\dot{x}+i\dot{y}$ 分解为实数及虛数两部分，我們便得到

$$\dot{x}=a\cos\omega t+\frac{cE_y}{H},\quad \dot{y}=-a\sin\omega t. \tag{3-43}$$

在 $t=0$ 时，速度是沿着 X 軸。

我們可以看出，粒子的速度是时間的周期函数。注意到 $\overline{\cos\omega t}=\overline{\sin\omega t}=0$，則速度的平均值很容易求得：

$$\overline{\dot{x}}=\frac{cE_y}{H},\quad \overline{\dot{y}}=0. \tag{3-44}$$

所以沿着 Y 軸的平均速度为零，而沿着 X 軸的平均速度，即垂直于电場及磁場的平均速度不为零。

所有这一节的公式，都是在假設粒子的速度比光速小得多的基础上建立的；由(3-43)或(3-44)可以看出，为了实現这种情形，就有一定的要求，特别是要求电場与磁場必須滿足下面的条件：

$$\frac{E_y}{H}\ll 1, \tag{3-45}$$

但 E_y 及 H 的絕对值可以是任意的。

将方程(3-43)再积分一次，并这样来选擇积分常数，使当 $t=0$ 时，$x=y=0$，我們就可得到

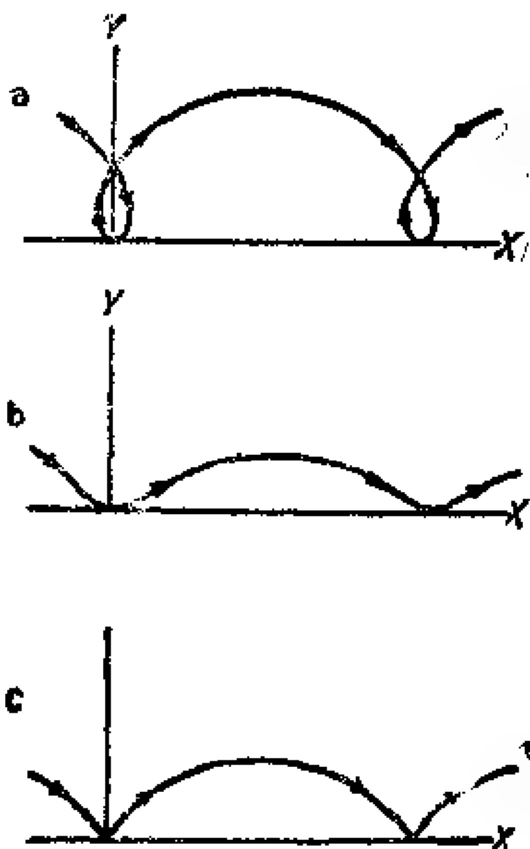


圖 3-1.

$$x=\frac{a}{\omega}\sin\omega t+\frac{cE_y}{H}t;$$

$$y=\frac{a}{\omega}(\cos\omega t-1). \tag{3-46}$$

将以上二式看作一个曲綫的参数方程，这两个方程定义一个所謂次擺綫。至于軌道在 XY 平面上的投影到底是如圖3-1a还是如圖 3-1b 所示的，那就得看 a 的絕对值是大于或小于 cE_y/H。

假如 $a=-cE_y/H$，那么，(3-46)就变为

$$x=\frac{cE_y}{\omega H}(\omega t-\sin\omega t),\quad y=\frac{cE_y}{\omega H}(1-\cos\omega t) \tag{3-47}$$

就是說，軌道在 XY 平面上的投影是一个擺綫(圖 3-1c)。

§3-9. 电磁場張量

在§3-2中，我們从写成三度形式的拉格朗日函数(3-4)导出了一个电荷在場內运动的方程。現在我們直接从用写成四度形式的作用量函数(3-1)导出同样的方程。

最小作用量原理是

$$\delta S=\delta\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}A_i\,dx_i\right)=0. \tag{3-48}$$

注意到 $ds=\sqrt{-dx_i^2}$，我們便求得(为了簡便起見，下面我們略去积分限 a 和 b)：

$$\delta S=\int\left[-mc\delta\, ds+\frac{e}{c}\delta(A_i\, dx_i)\right]=$$

$$=\int\left(mc\frac{dx_i\delta\, dx_i}{ds}+\frac{e}{c}A_i\delta\, dx_i+\frac{e}{c}\delta A_i\, dx_i\right)=$$

$$=\int\left(mc\frac{dx_i\, d\delta x_i}{ds}+\frac{e}{c}A_i\, d\delta x_i+\frac{e}{c}\delta A_i\, dx_i\right)=0.$$

将被积分函数中前两項作部分积分，并且在第一項中以 u_i 代 dx_i/ds，其中 u_i 是四度速度的分量。于是，

$$\int\left(-mc\, du_i\delta x_i-\frac{e}{c}\delta x_i\, dA_i+\frac{e}{c}\delta A_i\, dx_i\right)+$$

$$+\left[\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x_i\right]_a^b=0. \qquad (3\text{-}49)$$

上式中的第二項等于零，因为积分的变分是在两个固定点中間取的，即 $(\delta x_i)_a=(\delta x_i)_b=0$。此外：

$$\delta A_i=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x_k, \qquad dA_i=\frac{\partial A_i}{\partial x_k}dx_k,$$

因此

$$\int\left(-mc\, du_i\delta x_i-\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta x_i\, dx_k+\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}dx_i\delta x_k\right)=0.$$

在第一項中，我們写 $du_i=\frac{du_i}{ds}ds$；在第二和第三項中，我們写 $dx_i=u_i\, ds$；在第三項中将指标 i 与 k 交換(因为 i 和 k 都是求和指标，所以交換以后是甚么也不改变)。于是，

$$\int\left[-mc\frac{du_i}{ds}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)u_k\right]\delta x_i\, ds=0.$$

由于 δx_i 的任意性，我們可以推断出来，被积分函数必須为零，即

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)u_k. \qquad (3\text{-}50)$$

現在我們引用下面的符号:

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}. \tag{3-51}$$

張量 F_{ik} 称为电磁場張量。这样一来，运动方程(3-50)取下面的形式:

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{ik}u_k. \tag{3-52}$$

这四个方程($i=1,2,3,4$)就是电荷在电磁場内的运动方程的四度形式。

由張量 F_{ik} 的定义，即可推出

$$F_{ik}=-F_{ki}, \tag{3-53}$$

这就是說，电磁場張量是反对称的。因此，当 $i=k$ 时，$F_{ik}=0$.

将 $A_{1,2,3}=A_{x,y,z}$ 和 $A_4=i\varphi$ 代入(3-51)，我們很容易求出張量 F_{ik} 的各个分量的值如下:

$$F_{11}=F_{22}=F_{33}=F_{44}=0$$

$$F_{12}=-F_{21}=H_z,\ F_{14}=-F_{41}=-iE_x,$$

$$F_{13}=-F_{31}=-H_y,\ F_{24}=-F_{42}=-iE_y,$$

$$F_{23}=-F_{32}=H_x,\ F_{34}=-F_{43}=-iE_z.$$

这些值可以写如下表:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix} \tag{3-54}$$

由此可見，电場强度与磁場强度的分量是四度电磁場張量的分量。

由(3-54)式可以看出，張量 F_{ik} 的空間分量(即$i, k=1,2,3$, 的各分量)是同磁場相联系的。就是說，磁場 $\mathbf{H}$ 的分量构成一个三度二阶反对称張量。大家知道，这就意味着矢量 $\mathbf{H}$ 是一个軸矢

量(見§ 1-6)。

电場 $\mathbf{E}$ 的分量是 F_{ik} 的时間分量(i 或 $k=4$)。显然 $\mathbf{E}$ 是一个普通矢量(極矢量)。

利用(3-54)及(1-40),很容易証明,(3-52)中的前三个方程同运动方程(3-16)是完全一样的,而第四个方程則同方程(3-18)完全一样。这四个方程中仅有三个是独立的这一事实,可以直接用 u_i 乘方程(3-52)的两边来証明。这时,由于(1-44)及(3-53),方程式的两边都恒等于零。

假如在变分 δS 中,只考虑眞实的軌道綫,那么,(3-49)中的第一項就恒等于零。这时,第二項(把它的积分限之一認为是变化的)得給出作为坐标函数的作用量的微分。因之

$$\delta S=\left(mcu_i+\frac{e}{c}A_i\right)\delta x_i, \tag{3-55}$$

由此可得,

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}=mcu_i+\frac{e}{c}A_i=p_i+\frac{e}{c}A_i. \tag{3-56}$$

以 $\partial S/\partial x_i$ 为分量的四度矢量是四度广义冲量矢量 P_i。应用四度速度及其四度势的表示式,我們求出分量 P_i 的表示式如下:

$$P_\alpha=p_\alpha+\frac{e}{c}A_\alpha,\quad P_4=\frac{i}{c}(\mathscr{E}_{\text{кин}}+e\varphi), \tag{3-57}$$

其中 $\mathscr{E}_{\text{кин}}=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$。四度矢量 P_i 的三个空間分量构成三度广义冲量矢量(3-5)。其时間分量正如§2-3中一样,是 $i\mathscr{E}/c$,其中 $\mathscr{E}$ 是电荷在場中的总能量。

由于 $u_i^2=-1$,所以

$$\left(P_i-\frac{e}{c}A_i\right)^2=-m^2c^2, \tag{3-85}$$

这一个关系同(3-7)吻合。将 P_i 代之以 $\partial S/\partial x_i$,我們得到哈密頓-雅科畢方程(3-11)的四度形式:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{e}{c}A_i\right)^2+m^2c^2=0. \qquad (3\text{-}59)$$

習　題

1. 一个电荷在平行的电場与磁場内运动，其速度可以与光速相比拟，求电荷的运动方程。

解: 选取場的方向为 Z 軸的方向，我們求得运动的方程 (3-52) 的下面的形式（引入常数 $\lambda=e/mc^2$):

$$\ddot{x}=\lambda H\dot{y},\ \ddot{y}=-\lambda H\dot{x},\ \ddot{z}=cE\lambda\dot{t},\ c\ddot{t}=E\lambda\dot{z}$$

（在字母 x, y, z, t 上面的点表示对 s 的微分），并有輔助条件 $u_i^2=\dot{x}_i^2=-1$。这个方程組分裂为两对独立的方程。将这些方程积分并适当地选擇积分常数（s 的初値、坐标的原点、X 及 Y 軸的方向），我們求得軌道参数方程如下：

$$x=\frac{a}{\lambda H}\sin\lambda Hs,\quad y=\frac{a}{\lambda H}\cos\lambda Hs,$$

$$z=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E}\ \mathrm{ch}\,\lambda Es,\qquad ct=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\lambda E}\ \mathrm{sh}\,\lambda Es.$$

（a 是一个任意常数）。我們要注意，这个軌道是一个半徑是 $a/\lambda H$ 的螺旋綫。

2. 同上面的問題一样，不过电場与磁場相互垂直。

解: 取 $\mathbf{H}$ 的方向为 Z 軸的方向，取 $\mathbf{E}$ 的方向为 Y 軸的方向，我們求得运动方程

$$\ddot{x}=\lambda H\dot{y},\ \ddot{y}=\lambda Ec\dot{t}-\lambda H\dot{x},\ \ddot{z}=0,\ c\ddot{t}=\lambda E\dot{y}.$$

将这些方程积分（利用輔助条件 $u_i^2=-1$），适当地选擇坐标原点，我們可求得下面的軌道参数方程。

当 $H>E$ 时，

$$x=\frac{1}{\sqrt{H^2-E^2}}(\gamma H\sin\sigma+E\beta\sigma),\ y=\gamma\cos\sigma,\ z=\alpha\sigma,$$

$$ct=\frac{1}{\sqrt{H^2-E^2}}(\gamma E\sin\sigma+H\beta\sigma),$$

其中 α, β, γ 有关系式

$$\beta^2-\alpha^2-\gamma^2=\frac{1}{\lambda^2(H^2-E^2)},$$

而参数 σ 与 s 的关系为 $\sigma=s\lambda\sqrt{H^2-E^2}$。

当 $H<E$ 时，

$$x=\frac{1}{\sqrt{E^2-H^2}}(\gamma H\,\mathrm{sh}\,\sigma+\beta E\sigma),\ y=\gamma\,\mathrm{ch}\,\sigma,\ z=\alpha\sigma,$$

$$ct=\frac{1}{\sqrt{E^2-H^2}}(\gamma E\operatorname{sh}\sigma+\beta H\sigma),$$

$$\gamma^2-\alpha^2-\beta^2=\frac{1}{\lambda^2(E^2-H^2)},\quad \sigma=s\lambda\sqrt{E^2-H^2}.$$

当 $H=E$ 时，

$$x=\frac{\beta}{6}\sigma^3+\frac{\alpha^2-\beta^2-\frac{\lambda^2}{H^2}}{2\beta}\sigma,\quad y=\frac{\beta}{2}\sigma^2,\ z=\alpha\sigma,$$

$$ct=\frac{\beta}{6}\sigma^3+\frac{\alpha^2+\beta^2+\frac{\lambda^2}{H^2}}{2\beta}\sigma,\ \sigma=s\lambda H,$$

其中 α 和 β 是两个独立常数。

§3-10. 場的洛倫茲变换

在本节内，我們将寻找場的变换公式，利用这些公式，假如在某一个慣性参考系統内場是已知的，在另一个慣性参考系統内，我們也能够决定这个場。

势的变换公式可以直接从四度矢量的普遍变换公式(1-26)得来。只須記起矢量 A_i 的分量是 $A_{x,y,z}$ $i\varphi$，我們就很容易得到

$$A_x=\frac{A'_x+\frac{V}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad A_y=A'_y,\ A_z=A'_z,$$

$$\varphi=\frac{\varphi'+\frac{V}{c}A'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.\tag{3-60}$$

張量 F_{ik} 的分量的变换公式可以从四度張量的普遍变换公式(1-28)得来。但是照下面的方法进行，更为便利。

我們記得，从一个参考系統 K 变换到另外一个参考系統 K'(K' 对 K 沿 X 軸作相对运动)与在四度空間 x, y, z, τ 中的 $x\tau$ 平面内的一个旋轉等价(見§1-4)。張量的分量所作的变换象两个相

应的坐标之乘积的变换一样。坐标 $x_2=y$ 及 $x_3=z$ 在这个变换中不变。由于同样的原因，F_{23} 也不变：

$$F_{23}=F'_{23}. \tag{3-61}$$

此外，基于同样的理由，既然坐标 y 与 z 不改变，所以分量 F_{12}, F_{13}, 及 F_{42}, F_{43} 的变换不过是象其相应的坐标 $x_1=x$, 及 $x_4=\tau$ 的变换一样。按照(1-26)，我們很容易求出：

$$\begin{aligned}
F_{12}&=\frac{F'_{12}-i\frac{V}{c}F'_{42}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{42}=\frac{F'_{42}+i\frac{V}{c}F'_{12}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\\
F_{13}&=\frac{E'_{13}-i\frac{V}{c}F'_{43}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad F_{43}=\frac{F'_{43}+i\frac{V}{c}F'_{13}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.
\end{aligned} \tag{3-62}$$

为了找出分量 F_{14} 的变换，我們注意下面的事实：假如一个反对称張量的阶数等于空間的度数（見§1-6关于張量 e_{iklm} 及 $e_{\alpha\beta\gamma}$ 的講述），那么，这个張量当坐标系統在这个空間內旋轉时是不变的。坐标系統 x, y, z, τ 在平面 $x\tau$ 內的旋轉可以二度坐标系統 x, τ 的在二度空間中的一个旋轉。分量为 $F_{11}=F_{44}=0$, $F_{14}=-F_{41}$ 的張量在这个系統內恰恰是一个阶数等于度数的張量。因此在 $x\tau$ 平面內旋轉时，

$$F_{14}=F'_{14}. \tag{3-63}$$

現在我們按照(3-54)式，用場 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 的分量来代替(3-61)及(3-63)中的 F_{ik}, 这样我們便求得电場的变换公式如下：

$$E_x=E'_x,\ E_y=\frac{E'_y+\frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ E_z=\frac{E'_z-\frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{3-64}$$

而对于磁場則有

$$H_x = H'_x,\ H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\ H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (3\text{-}65)$$

因此，电場与磁場，正如大多数的物理量一样，是相对的；就是說，它們在不同的参考系統中有不同的特性。就特殊情形言之，电場或磁場在一个参考系統中可以等于零，而同时在另外一个参考系統中却又存在。

变换公式(3-64)和(3-65)在 $V \ll c$ 的情况下将大大簡化。如果我們要求准确到 $\frac{V}{c}$ 的数量級，那么，从(3-64)及(3-65)可得

$$E_x = E'_x,\ E_y = E'_y + \frac{V}{c}H'_z,\ E_z = E'_z - \frac{V}{c}H'_y,$$

$$H_x = H'_x,\ H_y = H'_y - \frac{V}{c}E'_z,\ H_z = H'_z + \frac{V}{c}E'_y.$$

这些公式可以写成矢量形式

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}\mathbf{H}' \times \mathbf{V},\ \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}\mathbf{E}' \times \mathbf{V}. \qquad (3\text{-}66)$$

从 K' 到 K 的反变换公式可以用改变 V 的符号的方法直接由(3-64)、(3-65)、(3-66)求得。

假如在 K' 系統中磁場 $\mathbf{H}' = 0$，那么，根据(3-64) 及 (3-65)，我們可以很容易証明：在 K 系統中，电場与磁場之間存在着下面的关系：

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}. \qquad (3\text{-}67)$$

假如在 K' 系統中，$\mathbf{E}' = 0$，那么，在 K 系統中，

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}. \qquad (3\text{-}68)$$

因此，在以上两种情况下，电場与磁場在 K 系統中都是相互垂直的。

§3-11. 場的不变量

从电磁場張量的分量我們可以造出一些不变量，这些不变量当从一个慣性参考系統过渡到另一个慣性参考系統时保持不变。为了求出所有这些不变量，我們用类似求二阶对称張量的不变量的方法进行。假如 A_{ik} 是这样的一个張量，那么，大家知道，我們必須使行列式

$$|A_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0.$$

这个方程的根是对称張量 A_{ik} 的主値，也就是它的不变量；同样的推理显然可以应用到这个方程內的各次幂的系数，这些系数一般被选作主不变量。

对于一个反对称張量（F_{ik} 即是这样的張量），将它化为对角形式显然是沒有意义的。但是我們可以应用上面所說的方法去求这样的一个張量的不变量；这时根 λ 当然沒有張量特征値的意义。

按照上面的說法，我們写出方程

$$|F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=0.$$

因为，对于行列式而言，行与列的互換并不改变該行列式，所以很容易看出，在这里面仅仅包含 λ 的偶次方的項才能出現。此外，当一个偶数阶行列式的所有元素变号时，該行列式并不变。因此，由于 F_{ik} 的反对称性，

$$|F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=|F_{ki}-\lambda\delta_{ki}|=|-F_{ik}-\lambda\delta_{ik}|=|F_{ik}+\lambda\delta_{ik}|.$$

与此相应，在 λ 的方程內，仅能有两个异于零的系数，这就是 λ^2 及 λ^4 的系数；亦即一个二阶反对称張量的特征是只有两个不变量。

用(3-54)式代替張量 F_{ik} 的分量，我們不难将行列式展开而得到

$$\lambda^4+\lambda^2(H^2-E^2)-(\mathbf{H}\cdot\mathbf{E})^2=0$$

（在展开行列式时，这样选擇坐标軸是便当的，就是使一个軸，我們

称为 Z 軸，沿着 $\mathbf{H}$ 的方向，而使矢量 $\mathbf{E}$ 在 YZ 平面内）。因此，下面的量乃是不变量：

$$H^2-E^2=\text{不变量}, \tag{3-69}$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=\text{不变量}. \tag{3-70}$$

我們的推导方法就可証明，仅仅这两个不变量是独立的；其他任何不变量都可以用这两个不变量的函数来表示。

容易証明，不变量(3-69) 及 (3-70)，如果写成四度形式，就是

$$F_{ik}^2, \tag{3-71}$$

$$e_{iklm}F_{ik}F_{lm}, \tag{3-72}$$

其中 e_{iklm} 是一个四阶完全反对称單位張量(見 § 1-6)。

必須指出，严格說来，$e_{iklm}F_{ik}F_{lm}$(或 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$) 并不是一个矢量，而是一个贋矢量；这可从它的四度形式（張量与它的对偶的乘积，見 § 1-6），或从它的三度形式（軸矢量 $\mathbf{H}$ 同極矢量 $\mathbf{E}$ 的乘积）看出。$(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2$ 是一个眞标量。

从上面所得两量的不变性，我們得到下面的結論。假如电場与磁場在任意一个参考系統中是相互垂直的，就是說 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$，那么，它們在任何其他慣性参考系統中也是相互垂直的［由于 (3-70)］。假如 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 的絕对値在任意的一个参考系統中是相等的，那么，它們在任何其他系統中也相等［由于(3-69)］。

下面的不等式显然也成立。假如在任意一个参考系統中 $E>H$(或 $H>E$)，那么，在任何其他系統中我們也会有 $E>H$ (或 $H>E$)。假如在任意一个参考系統中，矢量 $\mathbf{E}$ 及矢量 $\mathbf{H}$ 的夹角是銳角(或鈍角)，那么，它們在任何其他参考系統中的夹角也是銳角(或鈍角)。

利用洛倫茲变換，总可以使 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 有任意的值，仅仅必須遵守 E^2-H^2 及 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}$ 两量有固定値的条件。就特殊情形言之，我們

总能找到一个慣性系統，在这个系統中，电場与磁場在某一給定点是互相平行的。在这个系統中 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=EH$，并且从

$$E^2-H^2=E_0^2-H_0^2,\ EH=\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{H}_0$$

两个方程我們可以找出 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 在这个参考系統中的值（$\mathbf{E}_0$ 及 $\mathbf{H}_0$ 是在原来参考系統中的电場及磁場）。

两个不变量都为零的情形应該除外。在这个情形下，$\mathbf{E}$ 同 $\mathbf{H}$ 在一切参考系統中都是相等的而且是互相垂直的。

假如 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}=0$，那么，我們总能找到一个参考系統，在这个系統中 $\mathbf{E}=0$ 或 $\mathbf{H}=0$（依 $E^2-H^2<0$ 或 >0 而定），就是說，場是純磁場或純电場。反之，假如在任意一个参考系統中 $\mathbf{E}=0$ 或 $\mathbf{H}=0$，那么，它們在所有其他系統中都是相互垂直的。

習　題

有一个参考系統，在其中，电場与磁場是相互平行的，試求这个参考系統的速度。

解：滿足所提条件的参考系統 K' 有无穷多。假如我們找到一个这样的系統，那么，相对这个参考系統的运动速度沿着 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 的共同方向之任何其他参考系統，也都具有同样的特性。因此，我們只須找到这些参考系統中的一个就够了，这一个参考系統有与两个場都垂直的速度。选擇速度的方向为 X 軸的方向，利用这个事实，即在 K' 中 $E'_x=H'_x=0$，$E'_yH'_z-E'_zH'_y=0$，我們借助于公式(3-64)及(3-65)得到参考系統 K' 相对于原来参考系統的速度 $\mathbf{V}$ 的方程如下：

$$\frac{\frac{\mathbf{V}}{c}}{1-\frac{V^2}{c^2}}=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{E^2+H^2}$$

（在二次方程的两个根中，自然应該选擇 $V<c$ 的那一个根）。

第四章　場方程

§ 4-1. 第一对麦克斯韋方程

从場 E 及 H 的表示式 $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi$ [(3-14)及(3-15)]，很容易得到这两个場的方程，即仅含有 E 及 H 的关系式。为了求得这些方程，我們应当从 E 及 H 的表示式中消去势 A 及势 φ。为此，我們来求 rot E：

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A}-\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi.$$

但是任何梯度的旋度都为零，而且 $\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{H}$，所以，

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{4-1}$$

取方程 $\operatorname{rot}\mathbf{A}=\mathbf{H}$ 两边的散度，并且記起旋度的散度等于零，我們便得到

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0. \tag{4-2}$$

方程(4-1)及(4-2)称为第一对麦克斯韋方程[①]。我們要注意，这两个方程还不能完全确定場的特性。这一点可以从这个事实清楚地看出来，即它們决定了磁場对时間的变化$\left(\text{即导数 }\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)$，但是并沒有决定导数 $\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$。

方程(4-1)及(4-2)可以写成积分形式。按照高斯定理，

① 麦克斯韋方程(电动力学的基本方程)是麦克斯韋在 1860 年首先建立的。

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H}\, dV = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f},$$

此式右边的面积分应該在包圍着左边体积分所涉及之体积的封閉曲面上去求。根据(4-2)，我們得到

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = 0. \tag{4-3}$$

一个矢量在一个曲面上的积分称为矢量通过曲面的通量。因此，磁場通过每个封閉曲面的通量为零。

按照斯托克斯定理，

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

此式右边的綫积分是沿着包圍左边面积分所涉及之曲面的閉合曲綫而取的。沿着某一曲面积分(4-1)式的两边，我們便求得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f}. \tag{4-4}$$

一个矢量沿着一条封閉曲綫的积分称为該矢量沿該封閉曲綫的环流。电場的环流也称为該曲綫內的电动势。所以任何封閉曲綫內的电动势等于穿过由該曲綫所包圍的曲面的磁通量反号的时間导数。

麦克斯韋方程(4-1)及(4-2)可以写成四度形式。用电磁場張量的定义 $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$，很容易証明

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \tag{4-5}$$

当 $i=k=l$ 时，这个方程当然被滿足(因为当 $i=k$ 时，$F_{ik}=0$)。假如指标 i, k, l 中有两个相同，这个方程由于 F_{ik} 的反对称性也沒有甚么新奇。将 F_{ik} 的(3-54)式代入，很容易驗証其余的四个方程($i \neq k \neq e$ 的四个方程)恰好是方程(4-1)及(4-2)。所以(4-5)是用写成四度形式的第一对麦克斯韋方程。

§ 4-2. 电磁場的作用量

由电磁場和場内的一些粒子所組成的整个体系的作用量 S，应当包含着三个部分：

$$S=S_f+S_m+S_{mf}, \quad (4-6)$$

其中 S_m 是作用量中仅仅与粒子的性質有关的一部分。这部分作用量不是别的，就是自由粒子的作用量，即当場不存在时的粒子的作用量。我們知道，自由粒子的作用量是 $-mc\int ds$[見 (2-1)]。假如有几个粒子，它們的总作用量就是單个粒子的作用量之和。因此，

$$S_m=-\sum mc\int ds. \quad (4-7)$$

S_{mf} 是与粒子及場两者之間的相互作用有关的那一部分作用量。正如我們在§ 3-1 节中所看見的一样，它的形式是$\frac{e}{c}\int A_k dx_k$，或者在几个粒子的情形下，

$$S_{mf}=\sum\frac{e}{c}\int A_k dx_k. \quad (4-8)$$

在这个和的每一項內，A_k 是粒子所在的那个时間和空間点的場的势。和数 S_m+S_{mf} 是我們已經知道的，它是一个电荷在場內的作用量(3-1)，不过在那里我們簡單地用 S 来代表它。

最后，S_f 是作用量中仅仅与場本身的特性有关的那一部分，就是說，S_f 是場在沒有电荷时的作用量。到現在为止，因为我們仅仅注意了电荷在某一已知电磁場內的运动，沒有注意到与粒子无关的量 S_f，因为这一項并不能影响粒子的运动。但是，假如我們要寻找决定場本身的方程，这一項倒是必需的了。这是同下列事实相对应的：从作用量的 S_m+S_{mf} 这部分，我們只能求出場的两个方程，即(4-1) 及 (4-2)，要由这一对方程完全决定場是不够的。

为了建立場的作用量 S_f 的形式，我們从下面的电磁場的重要性質出發。实驗証明，电磁場滿足所謂“叠加原理”。这个原理可以叙述如下：假如一个电荷产生某一个場，另外一个电荷产生第二个场，那么，两个电荷联合起来所产生的場，就簡單地等于每一个电荷單独所产生的場的相加。这就是說，在每一点的总場强等于在該点的各个場强的矢量和。

場方程的每一个解給出一个在自然界中存在的場。按照叠加原理，任何这样一些場的和也必須是一个在自然界中存在的場，这就是說，必須滿足場方程。

大家知道，綫性微分方程恰恰具有这个特性，即任意一些解的和也是一个解。因此，場方程必須是綫性微分方程。

从这个討論可以推断，在作用量 S_f 的积分号內，必定有一个場的二次式。仅仅在这个情形下，場方程才是綫性的；因为場方程是由作用量的变分得来，而在变分的过程中，积分号內的式子的幂将要减小一。

势不能包含在作用量 S_f 内，因为它們还沒有唯一地被确定（在 S_{mf} 中，缺乏这种惟一性并不重要）。因此，S_f 应当是电磁場張量 F_{ik}[1] 的某函数的积分。但是作用量必須是一个标量，因而必須是某一个标量的积分。此外，如上面已經說过的，在被积分函数內出現的这个标量必須是 F_{ik} 的二次式。

从 F_{ik} 我們只能造出一个二次标量（見 § 3-11）。这就是 F^2_{ik}（$e_{iklm}F_{ik}F_{lm}$ 这个量是一个贋标量）。

因此，S_f 必須有下面的形式：

---

[1] S_f 的被积分函数必須不包含 F_{ik} 的时間导数，因为拉格朗日函数，除坐标外，只能包含它們对时間的一阶导数，而在現在的情形下，場的势 A_k 起着坐标（即在最小作用量原理中变分按它来进行的变量）的作用。这与力学中的情况类似，力学体系的拉格朗日函数也仅包含粒子的坐标和它們对时間的一阶导数。

$$S_f = a \iint F_{ik}^2 dV dt, \quad dV = dx dy dz,$$

其中积分应該遍及全部空間和已知的两个瞬时之間的时間間隔；a 是某一常数。积分号内的量是 $F_{ik}^2 = 2(H^2 - E^2)$。場 $\mathbf{E}$ 包含导数 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$；但是很容易看得出来，$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ 必須帶着正号出現在作用量内(因而 E^2 必須有正号)。因为假如 $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ 帶着負号出現在 S_f 内，那么，势对时間的变化要是足够快的話(在我們研究的时間間隔以内)，我們总能够使 $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$ 任意大而使 S_f 变为絕对值任意大的負量。因此，S_f 不能有为最小作用量原理所要求的最小值。因此，a 必須是負数。

a 的数值与测量場的單位的选擇有关。我們注意，当 a 的一个确定值以及測量場的單位选定了以后，測量所有其他电磁量的單位也就确定了。

从現在起，我們将采用所謂高斯單位制，在这个單位制中，a 是一个无量綱的量，其数值是 $-\frac{1}{16\pi}$。

除高斯單位制外，还用所謂海維賽德單位制，其中 $a = -\frac{1}{4}$。在这个單位制中，場方程将有比較便利的形式(π 不出現)，但是在另一方面，π 却出現在庫侖定律内。反之，在高斯單位制中，場方程包含着 π，但是庫侖定律却有簡單的形式。

因此，場的作用量有下面的形式：

$$S_f = \frac{i}{16c\pi} \int F_{ik}^2 d\Omega, \quad d\Omega = dx dy dz d\tau. \tag{4-9}$$

在此处，我們用 $d\Omega$ 代替了 $dV\,dt$，而且整个式子都除以了 ic。在三度形式中，

$$S_f = \frac{1}{8\pi} \iint (E^2 - H^2) dV dt, \tag{4-10}$$

換句話說，場的拉格朗日函数是

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2) dV. \qquad (4\text{-}11)$$

場連同其中的电荷的作用量有下面的形式:

$$S = -\sum\int mcds + \sum\int \frac{e}{c} A_k dx_k + \frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega. \quad (4\text{-}12)$$

我們要注意，現在并不象在推导一个电荷在給定場內的运动方程那样假設电荷很小。因此，A_k 及 F_{ik} 是指实在的場而言，这个場就是外場加上电荷本身所产生的場；現在 A_k 及 F_{ik} 与电荷的位置和速度有关。

§4-3. 四度电流矢量

到現在为止，我們只考慮了点电荷。在自然界中，所有的电荷实际上是点状的，因为如在 §2-1 中已經看出的，每个基本粒子应当看作一个点，而每个复杂粒子是由許多單个的基本粒子所組成。

然而为了数学上的便利，我們时常設想电荷是在空間連續分布的。这时我們可以介紹"电荷密度"ρ，使 ρdV 等于体积 dV 所包含的电荷。密度 ρ 一般是坐标和时間的函数。在某一个体积內取的体积分 $\int \rho dV$ 等于該体积內的电荷。

这里，我們必須記起，电荷实际上是点状的，因而除了点电荷所在点以外密度 ρ 都是零，而积分 $\int \rho dV$ 必須等于在給定体积內的所有电荷之和。因此 ρ 可以利用 δ-函数[1]写成下面的形式:

$$\rho = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \qquad (4\text{-}13)$$

式中是对存在的所有电荷求和，而 $\mathbf{r}_A$ 則是电荷 e_A 的矢徑。按照 δ-函数的特性，这个函数除了在 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A$ 的点以外实际上都是零，而积分

$$\int \rho dV = \sum_A e_A,$$

[1] 見 81 頁。

式中右边包含所有在給定体积内存在的电荷。

从电荷的定义可以知道，粒子的电荷是一个不变量，即是說，电荷与参考系統的选擇无关。另一方面，密度 ρ 一般来說并不是不变的，不变的仅仅是乘积 ρdV。

用 dx_i 乘等式 $de=\rho dV$ 的两边得

$$de\,dx_i=\rho dV dx_i=\rho dV dt\frac{dx_i}{dt}.$$

左边是一个四度矢量(因为 de 是一个标量，而 dx_i 是一个四度矢量)。这就意味着右边也是一个四度矢量。但 $dVdt$ 应当是一个标量(见§1-6)，所以 $\rho\frac{dx_i}{dt}$ 是一个四度矢量。这个矢量(我們用 j_i 来表示)称为四度电流矢量：

$$j_i=\rho\frac{dx_i}{dt} \tag{4-14}$$

---

① δ-函数 $\delta(x)$ 可定义如下：当 $x\neq0$ 时，$\delta(x)=0$；当 $x=0$ 时，$\delta(0)=\infty$，而且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx=1.$$

从这个定义，可以推断出下面的特性：假如 $f(x)$ 是任意的一个連續函数，那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)\,dx=f(a);$$

其中一个特殊情况是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)\,dx=f(0)$$

(自然，积分限不一定是 $\pm\infty$，积分的区間可以是任何包含 δ-函数不为零的点的范圍)。

我們再写出两个 δ-函数的等式，这两个等式的意思是，它們的左右两边在积分号内作因子时給出同样的結果：

$$\delta(-x)=\delta(x),\quad \delta(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}\delta(x).$$

类似于定义一个变量 x 的 $\delta(x)$，我們可以介紹一个三度 δ-函数 $\delta(\mathbf{r})$，这个函数除了在三度空間坐标的原点外，都是零，而其遍及全部空間的积分值是 1。对于这样一个函数，显然我們可以用乘积 $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ 来表示。

这个矢量的前三个分量构成一个普通空間的矢量，其分量为 $\rho\frac{dx}{dt}$、$\rho\frac{dy}{dt}$，$\rho\frac{dz}{dt}$，也就是矢量

$$\mathbf{j}=\rho\mathbf{V}, \tag{4-15}$$

其中 $\mathbf{V}$ 是在給定点的电荷的速度。矢量 $\mathbf{j}$ 称为电流密度矢量。四度电流矢量的第四个分量是 $ic\rho$。因此，

$$j_{1,2,3}=j_{x,y,z}, \quad j_4=ic\rho. \tag{4-16}$$

我們已經說过，在全部空間的总电荷，等于积分 $\int\rho dV$（积分应該遍及全部空間）。我們可以将这个积分写成四度形式：

$$\int\rho dV=\frac{1}{ic}\int j_4 dV=\frac{1}{ic}\int j_i dS_i, \tag{4-17}$$

其中积分应該遍及整个与 x_4 軸垂直的四度空間的超平面（这个积分显然就是遍及整个三度空間的积分）。

一般說来，遍及一个任意超曲面取的积分 $\frac{1}{ic}\int j_i dS_i$ 是那些电荷的和，这些电荷的世界綫通过这个曲面。

我們来将电流四度矢量引入作用量的表示式（4-12），即将該式中的第二項进行变换。按本节所述，我們可以引入以密度 ρ 連續分布的电荷来代替点电荷 e。这时显然应該用 $\frac{1}{c}\int\rho A_i dx_i dV$ 来代替(4-12)中的第二項，用遍及整个体积的积分来代替电荷的和。将 $\frac{1}{c}\int\rho A_i dx_i dV$ 写成 $\frac{1}{c}\int\rho\frac{dx_i}{dt}A_i dVdt$，我們看出这一項等于

$$-\frac{i}{c^2}\int A_i j_i d\Omega.$$

因此作用量 S 取下面的形式：

$$S=-\sum\int mcds-\frac{i}{c^2}\int A_i j_i d\Omega+\frac{i}{16\pi c}\int F_{ik}^2 d\Omega. \tag{4-18}$$

§4-4. 連續性方程

在某一个体积内的总电荷就等于遍及这个体积的积分 $\int\rho dV$。

电荷对时間的变化决定于导数 $\frac{\partial}{dt}\int \rho dV$。

另一方面，單位时間內的变化决定于單位时間內离开这个体积而走到外面去的电量，或者反过来，由外面进入这个体积內的电量。在單位时間內經过包圍該体积的曲面的面元 $d\mathbf{f}$ 的电荷等于 $\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{f}$，此处 $\mathbf{V}$ 是电荷在面元 $d\mathbf{f}$ 所在的空間一点的速度。矢量 $d\mathbf{f}$ 如通常一样，沿着曲面的外法綫方向，就是說沿着由所考慮的体积指向外面的法綫的方向。所以假如电荷离开体积，$\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{f}$ 为正；假如电荷进入体积，$\rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{f}$ 就为負。因此，在單位时間內离开給定体积的总电荷是 $\oint \rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{f}$，此处的积分必須遍及包圍这个体积的整个封閉曲面。

由这两个表示式相等，我們得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \rho\mathbf{V}\cdot d\mathbf{f}. \tag{4-19}$$

右边出現了負号，因为假如在一个給定体积內总电荷增加的話，左边就是正的。方程(4-19)称为連續性方程，这个方程是用积分形式来表示电荷守恒的。注意到 $\rho\mathbf{V}$ 是电流密度[見(4-15)式]，我們可以将(4-19)改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{f}. \tag{4-20}$$

我們再来将这个方程写成微分形式。为此，我們引用高斯定理到(4-20)式的右边：

$$\oint \mathbf{j}\cdot d\mathbf{f} = \int \operatorname{div}\mathbf{j}\, dV.$$

将上式代入(4-20)式，我們得到 $\int\left(\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)dV=0$。因为这个方程对于在一个任意体积上取积分都是有效的，所以被积分函数必須为零：

$$\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{4-21}$$

这就是連續性方程的微分形式。

很容易証实，ρ 的 δ-函数(4-13)自动地滿足方程(4-21)。为簡便起見，假設总共只有一个电荷，則

$$\rho = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

这时电流 $\mathbf{j}$ 是

$$\mathbf{j} = e\mathbf{V}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

此处 $\mathbf{V}$ 是电荷的速度。現在我們来确定导数 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$。电荷运动时，它的坐标要改变，即矢量 $\mathbf{r}_0$ 要改变。所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}.$$

但是 $\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}$ 恰是电荷的速度 $\mathbf{V}$。此外，因为 ρ 是 $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ 的函数，所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}.$$

因此
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{V}\cdot \operatorname{grad} \rho = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$$

(电荷的速度 $\mathbf{V}$ 当然与 $\mathbf{r}$ 无关)。因此，我們得到了方程(4-21)。

很容易証明，連續性方程(4-21)写成四度形式則为

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0. \tag{4-22}$$

在上一节中我們已經看出，在全部空間的总电荷可以写成 $\frac{1}{ic}\int j_i dS_i$，这个积分应該遍及超平面 $x_4=$常数。在另一瞬間，总电荷由这样一个积分必須遍及与 x_4 軸垂直的另一超平面的积分給出。很容易証明，方程(4-22)实际上可导出电荷守恒定律，即不論我們在那一个超平面 $x_4=$常数上取积分，积分 $\int j_i dS_i$ 都是一样的。在两个这种超平面上的积分 $\int j_i dS_i$ 之差，可以写成 $\oint j_i dS_i$，此处的积分是沿整个封閉的超曲面而取的，而这个封閉的超曲面是包圍着我們所考慮的两个超平面之間的四度体积的

(这个积分与所求之差的差别是一个沿无穷远的"侧"面(也是超平面)的积分，但是在无穷远处沒有电荷，所以这个积分为零)。利用高斯定理(1-35)我們可以将这个积分轉换为一个遍及两个超平面之間的四度体积的积分，再利用(4-22)就証明了

$$\oint j_i dS_i = \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i} d\Omega = 0. \tag{4-23}$$

上面的証明很明显地对任意两个积分 $\int j_i dS_i$ 都是有效的，此处的积分是遍及任意两个无限超表面（不仅是超平面 x_4 = 常数），每个超表面都包括整个(三度)空間。由此得到下面的結論，即积分 $\int j_i dS_i$ 不管是沿着那一个这样的超曲面而取的，其值实际上是相同的。

§ 4-5. 第二对麦克斯韋方程

在利用最小作用量原理来求場方程时，我們应当認为电荷的运动为已知，而只变分場，即只变分势；另一方面，在求运动方程时，我們又認为場为已知，而只变分粒子的軌道。

所以(4-18)式中第一項的变分是零，而在第二項中，我們不能变分电流 j_i。因此，

$$\delta S = \int\left(\frac{1}{ic^2} j_i \delta A_i - \frac{1}{16\pi ic} \delta(F_{ik}^2)\right) d\Omega =$$

$$= \int \frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \delta F_{ik}\right\} d\Omega = 0.$$

将 $F_{ik} = \partial A_k/\partial x_i - \partial A_i/\partial x_k$ 代入，我們就得到

$$\delta S = \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \delta\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\right\} d\Omega =$$

$$= \int \frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c} j_i \delta A_i - \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta A_k + \frac{1}{8\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i\right\} d\Omega.$$

在第二項中，我們将指标 i 同 k 交换，其中 i, k 是求和指标，此外

用 $-F_{ki}$ 代替 F_{ik}，于是我們得到

$$\delta S=\int\frac{1}{ic}\left\{\frac{1}{c}j_i\delta A_i+\frac{1}{4\pi}F_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

将第二項作部分积分，換句話說，就是应用高斯定理：

$$\delta S=\frac{1}{ic}\int\left\{\frac{1}{c}j_i-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right\}\delta A_i d\Omega+$$

$$+\frac{1}{4\pi ic}\int F_{ik}\delta A_i dS_k\Big|. \qquad (4\text{-}24)$$

在第二项中，我們应当取它在积分限上的值。坐标的积分限是在无穷远处（因为我們所考虑的是整个場），在无穷远处的場为零。在时間的积分限上，就是在給定的初瞬間与末瞬間，势的变分为零，因为按照最小作用量原理的意思，場在这两个瞬間是給定的。因此，(4-24)式中的第二項为零，从而我們得到

$$\frac{1}{ic}\int\left(\frac{1}{c}j_i-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}\right)\delta A_i d\Omega=0.$$

因为按照最小作用量原理的意思，变分 δA_i 是任意的，所以 δA_i 的系数应当等于零：

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i. \qquad (4\text{-}25)$$

这四个方程（$i=1, 2, 3, 4$）是写为四度形式的第二对麦克斯韋方程。我們現在来写出它們的三度形式。第一个方程($i=1$)是

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x}+\frac{\partial F_{12}}{\partial y}+\frac{\partial F_{13}}{\partial z}+\frac{1}{ic}\frac{\partial F_{14}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_1.$$

将(3-54)式的 F_{ik} 的分量值代入，得到

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_x.$$

这个方程連同 $i=2, 3$的两个方程可以写成一个矢量方程：

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \qquad (4\text{-}26)$$

最后，第四个方程($i=4$)是

$$\frac{\partial iE_x}{\partial x}+\frac{\partial iE_y}{\partial y}+\frac{\partial iE_z}{\partial z}=\frac{4\pi}{c}ic\rho$$

或

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho. \tag{4-27}$$

方程（4-26）及（4-27）是用矢量写成的第二对麦克斯韋方程[①]。和第一对麦克斯韋方程一起，它們完全确定电磁場，是电磁場理論，或如通常所說，是电动力学的基本方程。

現在我們来将这些方程写成积分形式。在某一个体积上积分(4-27)，应用高斯定理

$$\int \operatorname{div}\mathbf{E}\,dV=\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f},$$

我們得到

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f}=4\pi\int \rho dV. \tag{4-28}$$

因此，电場通过一个封閉曲面的通量等于 4π 乘曲面所包圍的体积內的总电荷。

在一个非封閉曲面上积分(4-26)应用斯托克斯定理

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{f}=\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l},$$

我們得到

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{f}+\frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{f}. \tag{4-29}$$

我們称

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4-30}$$

这个量为"位移电流"。从(4-29)的下面的形式：

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\frac{4\pi}{c}\int\left(\mathbf{j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{f}, \tag{4-31}$$

我們知道，磁場繞着任何閉曲綫的环流等于穿过此閉曲綫所包圍之曲面的眞实电流与位移电流之和乘 $4\pi/c$，

① 麦克斯韋方程应用于眞空中电磁場連同位于其中的一个点电荷的形式是由洛倫兹定出的。

从麦克斯韋方程，我們可以得到已經知道的連續性方程（4-21）。取(4-26)式两边的散度，我們得到

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\ \mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\mathbf{j}.$$

但是按照(4-27)式 $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H}=0$，而 $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$。因此我們又重新得到了方程(4-21)。在四度形式中，从(4-25)式我們可得到

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}=\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j_i}{\partial x_i}.$$

但是因为 F_{ik} 的反对称性，用 $-F_{ki}$ 代替 F_{ik}，再将指标交换，则得

$$\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}=-\frac{\partial^2 F_{ki}}{\partial x_i \partial x_k}=-\frac{\partial^2 F_{ik}}{\partial x_k \partial x_i},$$

从这个方程可以得出 $\partial^2 F_{ik}/\partial x_i \partial x_k=0$，于是我們得到了写为四度形式的連續性方程(4-22)。

§4-6. 能量密度和坡印廷矢量

我們用 $\mathbf{E}$ 乘(4-26)式的两边，用 $\mathbf{H}$ 乘(4-1)式的两边，再将所得的方程相加，則可得

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}-(\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

应用众所周知的矢量分析公式

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

我們改写这个方程如下：

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2+H^2)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}-\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)=-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}-\operatorname{div}\mathbf{S}. \tag{4-32}$$

矢量

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{4-33}$$

称为坡印廷矢量。

将(4-32)在一个体积上积分，并在右边第二项中应用高斯定理，则我們得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV=-\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV-\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f}. \qquad (4\text{-}34)$$

假如积分是遍及整个空間，那么，面积分就等于零(因为在无穷远处場为零)。此外，我們可以用对所有电荷求和的式子 $\sum e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}$ 来表示积分 $\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV$，并按(3-18)式，将

$$e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{E}_{\text{кин}}$$

代入(此处 $\mathscr{E}_{\text{кин}}=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$)，那么(4-34)式化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV+\sum\mathscr{E}_{\text{кин}}\right\}=0. \qquad (4\text{-}35)$$

因此，对于一个包括电磁場及在場内的粒子的閉合系，上面方程括号内的量是守恒的。括号内的第二項是全部粒子的动能(还包括靜止能)；因而第一項就是場本身的能量。因此，我們称

$$W=\frac{E^2+H^2}{8\pi} \qquad (4\text{-}36)$$

为电磁場的能量密度；它是場的每一个單位体积内的能量。

假如我們在任何一个有限体积上积分，那么，(4-34)式中的面积分一般不等于零，因而我們可以将这个方程写成下面的形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV+\sum\mathscr{E}_{\text{кин}}\right\}=-\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f}, \qquad (4\text{-}37)$$

其中括弧内的第二項的求和仅涉及所考虑的体积内的各粒子。上式的左边是場与粒子的总能量在單位时間內的变化。因此，积分 $\oint \mathbf{S}\cdot d\mathbf{f}$ 必須認为是經过包圍給定体积的曲面的場能量的通量，因而坡印廷矢量 $\mathbf{S}$ 就是这个通量密度——在單位时間內流过曲面的單位面积的場能量[①]。

---

① 我們假定，在那一瞬間，所研究体积之表面本身上无粒子，如果不是这样，那么，在右边应当包括穿过曲面的粒子的能量的通量。

§4-7. 能量-冲量張量

在上一节中我們已經求出电磁場能量的表示式。現在我們来求出这个式子及場的冲量的四度形式。为簡便起見，我們現在只考虑无电荷的电磁場。为了以后的应用(对于引力場的应用)，也为了簡化計算，我們在一般形式下进行推导，而不將体系的具体类型特殊化。因此我們考虑一个任意体系，它的作用量积分为

$$S=\int\Lambda\left(q,\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)dV\,dt=\frac{1}{ic}\int\Lambda\,d\Omega, \tag{4-38}$$

其中 Λ 是一些量 q(q 是用来描写这个体系的)和它們对坐标及时間的第一阶导数的某一个函数(对于电磁場而言，四度势的分量就是这些量 q)；为簡便起見，这里我們只写了一个 q。我們应注意，空間积分 $\int\Lambda dV$ 是这个体系的拉格朗日函数，所以 Λ 可以認为是拉格朗日函数的"密度"。体系的閉合性的数学表示是 Λ 不明显地与 x_i 有关，这同閉合力学体系的拉格朗日函数不明显地与时間有关相类似。

按照最小作用量原理，运动方程(假如我們研究某种場，它就是場方程)可以变分 S 来得到。我們有(为簡便起見，我們用符号 $q_{,i}\equiv\partial q/\partial x_i$)，

$$\delta S=\int\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i}\right)d\Omega=$$

$$=\int\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right)-\delta q\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\right]d\Omega=0.$$

被积分函数內的第二項經过用高斯定理变换后，在整个空間內取积分将等于零，如是我們就得到下面的"运动方程"：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}-\frac{\partial\Lambda}{\partial q}=0 \tag{4-39}$$

(当然应当在重复的指标 i 上面求和)。

其余的推导与在力学中推导能量守恒定律的过程相似。亦即写出

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_i}+\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i}.$$

将(4-39)式代入，并注意 $\partial q_{,k}/\partial x_i=\partial^2 q/\partial x_i\partial x_k=\partial q_{,i}/\partial x_k$，我們便得到

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right)q_{,i}+\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right).$$

另一方面，我們可以写 $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}=\delta_{ik}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}$，所以

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}\delta_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}q_{,i}\right).$$

引用符号

$$T_{ik}=\delta_{ik}\Lambda-q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}},\tag{4-40}$$

我們可以将上面的关系式写成

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=0.\tag{4-41}$$

我們应注意，假如不是一个而有几个量 $q^{(l)}$，那么，代替(4-40)我們可以写

$$T_{ik}=\delta_{ik}\Lambda-\sum_l q_{,i}^{(l)}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}}.\tag{4-42}$$

但是在§4-4中我們已經看出，方程 $\partial A_k/\partial x_k=0$，亦即一个矢量的四度散度等于零，就相当于說这个矢量在超曲面(这个超曲面包括整个三度空間)上的积分 $\int A_k dS_k$ 守恒。显然类似的結果对于一个張量的散度也是成立的。$\partial T_{ik}/\partial x_k=0$ 这个方程就相当于說，以 T_{ik} 在超曲面上的积分

$$P_i=\text{常数}\times\int T_{ik}dS_k$$

为分量的矢量 P_i 是守恒的。

可以把这个矢量看作是体系的四度冲量矢量。我們要这样来

选擇积分号前面的常数，使矢量 P_i 的第四个分量按照前面的定义等于这个体系的能量乘以 i/c。为此，我們要注意，如果在超平面 $x_4=$ 常数，P_4 可以写成下面的形式：

$$P_4=\text{常数}\int T_{4k}dS_k=\text{常数}\int T_{44}dV,$$

另一方面，按照(4-40)式，

$$T_{44}=-\dot{q}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}}+\Lambda. \qquad \left(\dot{q}=\frac{\partial q}{\partial t}\right)$$

这个量同通常的联系能量与拉格朗日函数的公式吻合，它应当被認为是体系的能量密度。因此 $-\int T_{44}dV$ 就是体系的总能量。所以我們应当使常数 $=-\frac{i}{c}$，最后我們得到体系的四度冲量表示式

$$P_i=-\frac{i}{c}\int T_{ik}dS_k. \tag{4-43}$$

張量 T_{ik} 称为体系的能量-冲量張量。

必須指出，張量 T_{ik} 的决定实質上不是唯一的。事实上，在由方程 (4-40) 所定义的張量 T_{ik} 上，我們还可以加一个形式如 $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$ 的量，此处的 ψ_{ikl} 是任意一个对 k,l 两指标的为反对称的張量。經过这样的变化后，新張量 T_{ik} 还能滿足方程(4-41)，因为 $\partial^2\psi_{ikl}/\partial x_k\partial x_l=0$。体系的四度总动量，$P_i$ 在这种情况下一般是不改变，因为按照(1-36)我們可以写

$$\int\frac{\partial\psi_{ikl}}{\partial x_l}dS_k=\frac{1}{2}\int\left(dS_k\frac{\partial\psi_{ikl}}{\partial x_l}-dS_l\frac{\partial\psi_{ikl}}{\partial x_k}\right)=\int\psi_{ikl}df_{kl},$$

此处，等式左边的积分是遍及一超曲面，而右边积分应遍及"包圍"此超曲面的(普通)曲面。这个曲面在三度空間中显然是在无穷远处，而因为場或粒子在无穷远处都不存在，所以这个积分为零。因此体系的四度冲量是唯一决定了的量。为了唯一地确定張量 T_{ik}，我們可以利用这样一个条件；即体系的四度冲量矩張量(見§2-6)

可借助于下式用四度冲量来表示:

$$M_{ik}=\int(x_i dP_k-x_k dP_i)=-\frac{i}{c}\int(x_i T_{kl}-x_k T_{il})dS_l \quad (4\text{-}44)$$

就是說,不但是体系的总冲量矩,而且还有它的"密度"都可按普通公式以冲量的"密度"表示之。

很容易确定能量-冲量張量应当满足些什么条件,才能作到这点。

如我們已經知道的,冲量矩守恒定律可以用在 M_{ik} 的积分号內的式子的散度等于零来表示。因此

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(x_i T_{kl}-x_k T_{il})=0.$$

注意到 $\partial x_i/\partial x_l=\delta_{il}$, 而 $\partial T_{kl}/\partial x_l=0$, 我們可由此得到

$$\delta_{il}T_{kl}-\delta_{kl}T_{il}=T_{ki}-T_{ik}=0$$

或

$$T_{ik}=T_{ki}, \quad (4\text{-}45)$$

即能量-冲量張量必須是对称的。

我們要注意,一般地說,用公式(4-40)定义的 T_{ik} 并不是对称的,但是加上了象 $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$ 这样一个式子以后,就可使它变为一个对称張量,ψ_{ikl} 当然要合适。

以后(§ 11-4)我們可以看出,有一个直接的方法去求得一个对称張量 T_{ik}。上面已經說过,假如我們将(4-43)的积分在超平面 x_4 = 常数上进行,那么,P_i 就取下面的形式:

$$P_i=-\frac{i}{c}\int T_{i4}dV, \quad (4\text{-}46)$$

此处的积分遍及整个(三度)空間。既然 P_i 的空間分量构成体系的三度冲量矢量而且既然时間分量是它的能量乘以 i/c, 那么分量 $-\frac{i}{c}T_{\alpha 4}$ 可以称为"冲量密度",而 $-T_{44}$ 則称为"能量密度"(就是單位体积內的冲量与能量)。

为了明白 T_{ik} 的其余分量的意义,我們将守恒方程(4-41)写

成三度形式：

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial T_{44}}{\partial t}+\frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha}=0, \quad \frac{1}{ic}\frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t}+\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0. \qquad (4\text{-}47)$$

我們将这两个方程在空間的一个体积内积分。从第一个方程得到

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}dV+\int\frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha}dV=0,$$

用高斯定理变换第二个积分，則得

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int T_{44}dV=ic\oint T_{4\alpha}df_\alpha, \qquad (4\text{-}48)$$

此式右边的积分应該在包圍体积 V 的曲面上取。左边的式子是体积 V 中所含的能量随时間的改变率；因此，右边的式子显然是穿过体积 V 的边界面的能量，而 $-icT_{4\alpha}$ 則是能量通量密度——單位时間内穿过單位面积的能量。因此，能的通量密度等于冲量密度乘以 c^2。

从第二个方程，我們可同样地求得

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{i}{c}\int(-T_{\alpha 4})dV=-\oint T_{\alpha\beta}df_\beta. \qquad (4\text{-}49)$$

式子的左边是在單位时間内，在体积 V 内的体系的冲量变化；所以 $\oint T_{\alpha\beta}df_\beta$ 就是在單位时間内从体积 V 穿出来的冲量，而 $T_{\alpha\beta}$ 則是冲量的通量密度。能量的通量密度是一个矢量；因为冲量的通量本身是一个矢量，所以冲量的通量密度必須是一个張量(这个張量的分量 $T_{\alpha\beta}$ 是在單位时間内穿过垂直于 x_α 軸的單位面积的冲量的 α 分量)。

§4-8. 电磁場的能量-冲量張量

現在我們来应用前节所得的一般关系到电磁場中。对于电磁場，(4-38)式中积分号内的量，按照(4-9)式，应該等于

$$\Lambda=-\frac{1}{16\pi}F_{ik}^2=-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)^2.$$

q 这些量是場的四度势的分量 A_k，代入張量 T_{ik} 的定义（4-42）內，可得

$$T_{ik}=-\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)}+\delta_{ik}\Lambda_{\circ}$$

为了計算此处出現的 Λ 的导数，我們来求变分 $\delta\Lambda$。我們有

$$\delta\Lambda=-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)=$$

$$=-\frac{1}{8\pi}F_{kl}\left(\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k}-\delta\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right),$$

交換指标并利用 $F_{kl}=-F_{lk}$，則得

$$\delta\Lambda=-\frac{1}{4\pi}F_{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x_k}.$$

由此可見，

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_k}\right)}=-\frac{1}{4\pi}F_{kl},$$

因此

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}F_{kl}-\frac{1}{16\pi}\delta_{ik}F_{lm}^2.$$

为了使这个式子对指标 i 及 k 为对称，我們加一項 $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl}$ 到这个式子上，这一項具有导数 $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi_{ikl}$ 的形式，因为

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_l}F_{kl}=\frac{\partial(A_iF_{kl})}{\partial x_l}-A_i\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l}=\frac{\partial(A_iF_{kl})}{\partial x_l}$$

（按照麦克斯韋方程（4-25），在沒有电荷的点上，$\partial F_{kl}/\partial x_l=0$）。因此，正如上一节所述，这一項实际上可以加到能量-冲量張量上。既然 $\partial A_l/\partial x_i-\partial A_i/\partial x_l=F_{il}$，那么我們可求得电磁場能量-冲量張量的表示式

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{kl}-\frac{1}{4}F_{lm}^2\delta_{ik}\right).\qquad(4\text{-}50)$$

很容易証明，电磁場的張量 T_{ik} 滿足 $T_{ik}=T_{ki}$；此外，它还有一个特性，就是对角綫上的项之和为零：

$$T_{ii}=0. \tag{4-51}$$

現在我們用电場和磁場来表示張量 T_{ik} 的分量。利用 F_{ik} 的分量的表示式(3-54)，很容易求得 T_{ik} 的表示式如下：

$$T_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left(-E_\alpha E_\beta-H_\alpha H_\beta+\frac{1}{2}(E^2+H^2)\delta_{\alpha\beta}\right),$$

$$T_{4\alpha}=\frac{i}{c}S_\alpha,\quad T_{44}=-W, \tag{4-52}$$

式中 $W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)$ 是場的能量密度，而 $\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ 則是坡印廷矢量。三度張量 $T_{\alpha\beta}$ 称为麦克斯韋应力張量。

到現在为止，我們只考慮了沒有电荷存在的場。假如有粒子存在，那么，場和粒子的总能量和总冲量就等于場的能量和冲量与各个粒子的能量和与冲量和，就是說，四度总冲量是

$$P_i=-\frac{i}{c}\int T_{ik}dS_k+\sum p_i, \tag{4-53}$$

式中 $p_i=mcu_i$ 是粒子的四度冲量，而求和时則应該包括場內所有的粒子。写成三度形式的場和电荷的总冲量是

$$\int\frac{\mathbf{S}}{c^2}dV+\sum\mathbf{p},$$

而总能量則是

$$\int WdV+\sum\mathscr{E}.$$

不难証明，按照(4-53)式所定义的 P_i 确实是守恒的。下面我們来計算矢量 P_i 在时間 dt 内的变化 dP_i。我們可以用与在 §4-4 中求电荷变化的类似方法求之。在某一瞬間 t，P_i 可由公式(4-53)来决定，公式里的积分遍及整个超平面 $t=$ 常数。在 $t+dt$ 的瞬間，P_i 可由同一个公式决定，公式中的积分現在遍及超平面 $t+dt=$ 常数，而粒子的冲量則是在 $t+dt$ 瞬間的冲量。在这两个超平面上的积分 $\int T_{ik}dS_k$ 之差可以写成积分 $\oint T_{ik}dS_k$ 的形式，这是一个遍及包圍这两个超平面間的四度体积的超曲面的积分

(在无穷远处,場等于零,因此在"边界超曲面"上的积分为零)。因此,

$$dP_i = -\frac{i}{c}\oint T_{ik}dS_k + \sum dp_i;$$

用高斯定理,则

$$dP_i = -\frac{i}{c}\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}d\Omega + \sum dp_i, \qquad (4\text{-}54)$$

公式中的积分是遍及两个相距无穷近的超平面間的四度体积。

(4-54)中的第二項可以利用电荷在場内的运动方程(3-52)变换之,即利用

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k,$$

将此式乘以 ds, 则得

$$dp_i = \frac{e}{c}F_{ik}dx_k = \frac{e}{c}F_{ik}\frac{dx_k}{dt}dt.$$

引入电荷密度 ρ,则我們有

$$\sum dp_i = \frac{dt}{c}\int \rho F_{ik}\frac{dx_k}{dt}dV = \frac{dt}{c}\int F_{ik}j_k dV,$$

此处 j_k 是四度电流矢量。但是这个式子可以写成下面的形式:

$$\sum dp_i = \frac{1}{ic^2}\int F_{ik}j_k d\Omega,$$

式中的积分所涉及的体积与 (4-54) 式中第一項所涉及的体积相同。因此,

$$dP_i = -\frac{i}{c}\int\left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c}F_{ik}j_k\right)d\Omega.$$

另一方面,利用麦克斯韋方程可以証明被积分函数为零,因此 dP_i 为零, 就是說, P_i 确实是守恒的。为了証明这一点, 我們用(4-50)式写出

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{4}\frac{\partial F^2_{lm}}{\partial x_k}\delta_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_k}(F_{il}F_{kl})\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i}F_{lm} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{kl} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k}F_{il}\right).$$

将麦克斯韋方程(4-5)及(4-25),即

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i \quad 及 \quad \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i}=-\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l}-\frac{\partial F_{il}}{\partial x_m},$$

代入,并記着張量 F_{ik} 是反对称的,則得到

$$\frac{\partial T'_{ik}}{\partial x_k}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x_l}F_{lm}+\frac{1}{2}\frac{\partial F_{il}}{\partial x_m}F_{lm}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k}F_{kl}-\frac{4\pi}{c}F_{il}j_l\right).$$

交换指标很容易証明,右边前三項相互消掉了,因而我們得到了所要求的結果:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}=-\frac{1}{c}F_{ik}j_k. \tag{4-55}$$

这个方程是方程(4-41)的推广,是电磁場速同其中的粒子的能量守恒及冲量守恒定律的数学表示。此方程的第四个,很容易驗証,同方程(4-32)一样:

習 題

1. 求电磁場能量-冲量張量的主値。

解: 在某一个坐标系統中,如果 E 同 H 是平行的,那么,張量 T_{ik} 在这个坐标系統中将取对角形式,这时

$$-T_{11}=T_{22}=T_{33}=-T_{44}=W$$

(X 軸是沿着場的方向)。

假如 E 同 H 相互垂直,其絕对値相等,那么,T_{ik} 就不能化为对角形式。在这种情形,T_{ik} 的不为零的分量是

$$-T_{44}=T_{33}=-iT_{43}=W$$

(X 軸是沿着 E 的方向,Y 軸是沿着 H 的方向)。

2. 求电磁場的能量-冲量張量的分量的洛倫兹变換公式。

解: 从一般公式(1-28)及(1-29),我們得到

$$T_{xx}=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(T'_{xx}+2\frac{V}{c^2}S'_x+\frac{V^2}{c^2}W'\right),\quad T_{yy}=T'_{yy},\ T_{yz}=T'_{yz},$$

$$T_{xy}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\left(T'_{xy}+\frac{V}{c^2}S'_y\right),\quad S_x=\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left[S'_x\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)+VW'+VT'_{xx}\right],$$

$$S_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}(S'_y - VT'_{xy}),$$

$$W = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W' + 2\frac{V}{c^2}S'_x + \frac{V^2}{c^2}T'_{xx}\right),$$

及对于 S_z, T_{xz}, T_{zz} 的类似的公式。

§ 4-9. 維里定理

讓我們来研究一个彼此沒有相互作用的粒子体系。引用以相应的方法确定的能量-冲量張量,可以把体系的四度总冲量写为四度形式。为此,我們用"質量密度"来描述質量在空間的分布,这就象我們用电荷密度来描述点电荷在空間的分布一样。用与电荷密度公式(4-13)相似的公式,質量密度可以写成下面的形式:

$$\mu = \sum_A m_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \tag{4-56}$$

式中的 $\mathbf{r}_A$ 是粒子的矢徑,求和是对这个体系中的所有粒子进行。

粒子的"四度冲量密度"有 $\mu c u_i$ 的形式。我們知道,这个密度是能量-冲量張量的分量 $-\frac{i}{c}T_{4\alpha}$,即 $T_{4\alpha} = -i\mu c^2 u_i$。但是質量密度 μ 是四度矢量 $\frac{\mu}{ic}\frac{dx_k}{dt}$ 的时間分量(同电荷密度相似,见§ 4-3)。因此,一个彼此沒有相互作用的粒子体系的能量-冲量張量是

$$T_{ik} = \mu c \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_k}{dt} = \mu c u_i u_k \frac{ds}{dt}. \tag{4-57}$$

这个張量是对称的,它也应該是对称的。

求能量-冲量張量(4-57)式的对角綫上的項之和,即 T_{ii} 这个量,我們得到

$$T_{ii} = \mu c u_i u_i \frac{ds}{dt} = -\mu c \frac{ds}{dt}.$$

将 $ds = c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ 及 μ 的(4-56)式一并代入,我們得到

$$T_{ii} = -\sum_{A} m_A c^2 \sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A). \qquad (4\text{-}58)$$

由此可見，$T_{ii}<0$。

很容易証明，(4-58)式对于任何彼此相互作用的带电粒子体系是有效的。事实上，这种体系的能量-冲量張量可以写成張量(4-57)同这些粒子所产生的电磁場的能量-冲量張量之和。但是对于电磁場，我們常有$T_{ii}=0$(§4-8)。因此，我們証实了，对于任何物理系統，

$$T_{ii} \leqslant 0, \qquad (4\text{-}59)$$

并且式中的等号仅对于沒有电荷存在的电磁場才成立。

現在我們考慮这样一个带电粒子体系，当它們在运动的时候表征它們的所有的量(坐标、冲量)都在有限范圍內变化；这样的运动称为似稳定运动。讓我們来确定这个体系的总能量$\mathscr{E}$的时間平均值。为此，我們取(4-47)式中的第二个方程的时間平均值。在求平均值的过程中，我們必須記住，导数$\partial T_{\alpha 4}/\partial t$的平均值，正如任何有界函数的导数的平均值一样必为零①。因此，我們得到

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\overline{T}_{\alpha\beta}=0.$$

我們用x_α乘这个方程，并将它对整个空間积分。我們用高斯定理来变换这个积分，并記着在无穷远处$T_{\alpha\beta}=0$(运动是在空間的有限区域内进行)，所以面积分为零：

$$-\int x_\alpha \frac{\partial \overline{T_{\alpha\beta}}}{\partial x_\beta} dV = \int \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\overline{T}_{\alpha\beta} dV = \int \delta_{\alpha\beta}\overline{T}_{\alpha\beta} dV = 0,$$

---

① 設$f(t)$是这样一个函数，那么，它的导数經过一个时間間隔T的平均值是

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt}dt = \frac{f(T)-f(0)}{T}.$$

既然$f(t)$仅在有限范圍內变化，那么，当T趋向无穷大时，$\overline{\frac{df}{dt}}$显然趋近于零。

因此，
$$\int \bar{T}_{\alpha\alpha}\, dV = 0. \tag{4-60}$$

根据这个等式，对于 $\bar{T}_{ii}=\bar{T}_{\alpha\alpha}+\bar{T}_{44}$ 的积分，我們可以写出

$$\int \bar{T}_{ii}\, dV = \int \bar{T}_{44}\, dV = -\bar{\mathscr{E}}.$$

最后，用 T_{ii} 的表示式(4-58)代入則得

$$\bar{\mathscr{E}} = \sum_A m_A c^2 \sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}. \tag{4-61}$$

这个关系，决定似稳定运动之能量平均值，就是經典力学的維里定理在相对論中的推广。对于低速度方程(4-61)化为

$$\bar{\mathscr{E}} - \sum_A m_A c^2 = -\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2},$$

就是說，总能量(減去靜止能)的平均値等于动能平均值的負数——这是与經典力学中一个带电粒子(按照庫侖定律相互作用着)的体系的維里定理相同。

我們要注意，$\bar{\mathscr{E}} < \sum_A m_A c^2$，就是說总能量的平均值小于粒子的靜止能之和，这也是应当的，因为否則的話，粒子就可以跑向无穷远处，而这个运动就不可能是似稳定的了。

§4-10. 宏观物体的能量-冲量張量

我們現在来研究一个宏观物体，并且求它的能量-冲量張量。穿过这个物体表面面元 df 的冲量通量就是作用在这个面元上的力。所以 $T_{\alpha\beta}df_\beta$ 是作用在这个面元上的力的 α 分量。現在我們引用一个参考系統，在这个系統中，物体的一个指定的体积元是靜止的。在这样一个参考系統中，帕斯卡定律是有效的，即是說，作用于物体的某一部分上的压力在一切方向都是相等的，而且在

无論任何地方都垂直于它所作用的面①。因此，我們可以写 $T_{\alpha\beta}\,df_\beta = p\,df_\alpha$, 从而

$$T_{\alpha\beta} = p\,\delta_{\alpha\beta},$$

式中，p 是物体內的压力。分量 $T_{\alpha4}$ 代表冲量密度，它們在我們所用的参考系統中，对于指定的体积元来說，等于零。分量 T_{44} 总为物体的能量密度，我們用 ε 来代表它；ε/c^2 是物体的質量密度，即每單位体积內的質量。我們着重指出，我們在这里所討論的是單位"固有"体积，也就是在这样一个参考系統中的体积，这个系統中，所指定的物体的那部分是靜止的。

因此，在我們所考慮的参考系統中，能量-冲量張量（所指定的物体的那部分的）有如下形式：

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}. \qquad (4\text{-}62)$$

現在很容易求出宏观物体在一个任意参考系統中的能量-冲量張量的表示式。为此，我們对于物体的一个体积元的宏观运动引入四度速度 u_i。在那个体积元是靜止的参考系統中，四度速度的分量 $u_\alpha = 0, u_4 = i$。T_{ik} 的式子必須如此的选擇，使它在这个参考系統中取(4-62)的形式。很容易証实，它等于

$$T_{ik} = (p+\varepsilon)u_i u_k + p\,\delta_{ik}. \qquad (4\text{-}63)$$

这个式子就是一个宏观物体的能量-冲量張量。写成三度形式，它的分量是

---

① 严格地說，帕斯卡定律仅仅对于液体及气体有效。但是对于固体，在不同方向的应力的最大可能差，較之在相对論中可以起作用的应力，是微不足道的，因此，我們也就不考慮它了。

$$T_{\alpha\beta}=\frac{(p+\varepsilon)v_\alpha v_\beta}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+p\,\delta_{\alpha\beta},$$

$$T_{\alpha4}=\frac{i(p+\varepsilon)v_\alpha}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)},\tag{4-64}$$

$$T_{44}=-\frac{\varepsilon+p\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

假如宏观运动的速度 v 比光速小很多，那么，我們就近似地有 $T_{\alpha4}=\frac{i}{c}(p+\varepsilon)v_\alpha$。既然 $-\frac{i}{c}T_{\alpha4}=\frac{1}{c^2}(p+\varepsilon)v_\alpha$ 是冲量密度，那么我們可以看出，在这种情况下，$\frac{1}{c^2}(p+\varepsilon)$ 就起着物体的質量密度的作用。

假如构成宏观物体的所有粒子的速度都比光速小很多(宏观运动速度可以任意)，T_{ik}的式子就可簡化。在这种情况下，在能量密度 ε 中，我們可以略去所有比静止能为小的各項，亦即我們可以用 μc^2 来代替 ε，此处 μ 是在物体的單位(固有)体积中所有粒子的質量之和(我們着重指出，在一般情况下，μ 应当与物体的实在質量密度 $\frac{\varepsilon}{c^2}$ 有差别，后者还包含着与物体內之粒子的微观运动的能量相应的質量，及与粒子彼此相互作用的能量相应的質量)。由分子的微观运动的能量所决定的压力，在这种情形下显然也比静止能量密度 μc^2 小很多。因此，我們求得 T_{ik} 的表示式

$$T_{ik}=\mu c^2 u_i u_k.\tag{4-65}$$

从(4-63)式，我們得到 $T_{ii}=-\varepsilon+3p$。任何体系的能量-冲量張量的一般特性(4-59)指出，一个宏观物体的压力与密度总是滿足下面的不等式[1]:

[1] 仅仅电磁波才能达到極限值 $p=\varepsilon/3$。

$$p<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4-66}$$

現在讓我們将 $T_{ii}=-\varepsilon+3p$ 同一般公式(4-58)相比較，我們知道后一式对任何参考系統都是有效的。既然我們現在是考慮一个宏观物体，那么就应当将(4-58)式对在單位体积內的 r 的所有值求平均。因此，我們得到

$$\varepsilon-3p=\sum_{A} m_A c^2\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}} \tag{4-67}$$

（求和应对在單位体积內的所有粒子进行）。

現在来把得到的公式应用到一种理想气体中去，我們假設这种气体由完全一样的粒子組成。既然理想气体的粒子彼此沒有相互作用，那么我們便可以应用公式(4-57)，而只須先对此公式取平均就行了。因此对于理想气体，

$$T_{ik}=nmc\overline{\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{ds}},$$

式中，n 是單位体积內的粒子数，上面的一横是对所有粒子求平均值的意思。假如在气体中沒有宏观运动，那么，在左边我們可以用 T_{ik} 的表示式(4-62)。比較这两个公式，我們得到方程:

$$\varepsilon=nm\overline{\left(\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)},\qquad p=\frac{nm}{3}\overline{\left(\frac{v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)}. \tag{4-68}$$

这两个方程是用粒子的速度来表示相对論中理想气体的密度与压力；第二个方程代替了大家所知道的非相对論性气体动力論中的公式。

第五章 恆定場

§5-1. 庫侖定律

对于恒定电場，或者如通常所說靜电場，麦克斯韋方程有下面的形式：

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{5-1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{5-2}$$

电場 $\mathbf{E}$ 可以只利用一个标势来表示如下：

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{5-3}$$

将(5-3)代入(5-1)，我們得到一个恒定电場的势所应滿足的方程

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{5-4}$$

这个方程称为泊松方程。就特例言之，在眞空中，即当 $\rho=0$时，势滿足拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi = 0. \tag{5-5}$$

从上面的方程可以得出一些結論，例如断定电場的势沒有一处为最大或为最小。事实上，为要使 φ 有極端値，那么，φ 对于坐标的一次导数必須为零，而二次导数 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ 又都有同样的符号。后一要求是不可能的，因为滿足了这样的要求，就不能滿足(5-5)了。

我們現在来求一个点电荷所产生的場。从对称的考慮可以知道，場的方向是从电荷 e 的所在点沿着矢徑指向空間各点。从同样的考慮还可以知道，場的大小 E 仅与离开电荷的距离 R 有关。为了求出絕对値，我們应用方程(5-1)的积分式(4-28)。穿过一个

半徑为 R，包圍着 e（以 e 所在点为中心）的球面的电場通量等于 $4\pi R^2E$；这个通量必須等于 $4\pi e$。由此，我們得到

$$E=\frac{e}{R^2}.$$

用矢量符号表示，場 $\mathbf{E}$ 可以写成

$$\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \tag{5-6}$$

因此，一个点电荷所产生的場与从电荷算起的距离的平方成反比。就是庫侖定律。这个場的势显然是

$$\varphi=\frac{e}{R}. \tag{5-7}$$

假如我們有一个电荷体系，那么，按照叠加原理，这个体系所产生的电場等于各个电荷單独所产生的电場之和。这个場的势是

$$\varphi=\sum_A\frac{e_A}{R_A},$$

式中 R_A 是从电荷 e_A 的所在点到我們求它的势的那一点的距离。假如我們引用电荷密度 ρ，这个公式就变为

$$\varphi=\int\frac{\rho}{R}dV, \tag{5-8}$$

其中 R 是从体积元 dV 到給定点的距离。

将点电荷的 ρ 及 φ 的值，即 $\rho=e\delta(\mathbf{R})$ 及 $\varphi=\frac{e}{R}$，代入（5-4）式，我們得到一个数学关系

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{R}). \tag{5-9}$$

§5-2. 电荷的静电能

我們研究一个电荷体系，并求它的能量。我們将从場的能量的概念出發，即从能量密度的公式（4-36）出發来討論。一个电荷

体系的能量应当等于

$$U=\frac{1}{8\pi}\int E^2 dV,$$

其中 E 是諸电荷所产生的場，而积分则应該遍及全部空間。将 $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ 代入，则可按下面的方式来变换 U：

$$U=-\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi\,dV=$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)dV+\frac{1}{8\pi}\int\varphi\operatorname{div}\mathbf{E}\,dV.$$

按照高斯定理，第一个积分等于 $\mathbf{E}\varphi$ 在包圍积分体积的曲面上的积分，但是因为場在无穷远处为零，而积分又要遍及全部空間，所以第一个积分为零。将 $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ (5-1)代入第二个积分，则得到电荷体系的能量表示式

$$U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\,dV. \tag{5-10}$$

对于一个点电荷体系，我們可以用对电荷求和的符号来代替积分号:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{A}e_A\varphi_A, \tag{5-11}$$

其中，φ_A 是所有电荷在 e_A 所在点所产生的場的势。

按照庫侖定律，假如我們应用所得的公式到一个基本带电粒子(例如电子)和粒子本身所产生的場上，那么，我們就得到一个結論，即电荷应当具有等于 $\frac{e\varphi}{2}$ 的“固有”势能，此处 φ 是电荷在其所在点产生的場的势。但是我們知道(見 § 2-1)，在相对論中，每一个基本粒子应当当作一个点。因此，基本粒子的場的势 $\varphi=\frac{e}{R}$ 在 $R=0$ 的这一点变为无穷大。这样一来，按照电动力学，电子就应当具有无限大的“固有”能，因而也就有无限大的質量(等于能量除以 c^2)。这个結論的物理荒謬性表明，电动力学本身的基本原理就导致一

个結果，即电动力学的应用应当限制在一定范圍內。

我們要注意，从电动力学，我們得到了无限大的“固有”能量与質量，因此在电动力学中就不能提出到底电子的总質量是不是电磁質量(就是与粒子的电磁固有能有关的質量)这个問題。

既然基本粒子的沒有物理意义的无限大“固有”能的出現，与粒子应当当作一个点看待的事实有关，那么我們可以得出結論：作为一个邏輯上完备的物理理論的电动力学，当过渡到充分小的距离时，就成为自相矛盾的了。我們可以提出这个距离有多大数量級的問題。注意到电子的电磁固有能与靜止能 mc^2 同数量級，就可以答复这个問題了。

另外一方面，假如我們認为电子具有一定的半徑 R_0，那么，它的固有势能应該与 $\frac{e^2}{R_0}$ 同数量級。从这两个量应同級的要求，亦即从 $\frac{e^2}{R_0}\sim mc^2$ 的要求出發，我們得到

$$R_0\sim\frac{e^2}{mc^2}. \qquad (5\text{-}12)$$

这个大小(称为电子的“半徑”)决定了电动力学适用于电子的范圍，这是从它的基本原理得来的。但是我們应該注意，实际上，由于量子現象[1]，电动力学应用范圍比我們在这里所确定的范圍(所謂“經典范圍”)还要小得多。

現在我們再回到公式(5-11)。从庫侖定律知道，公式中的势 φ_A 等于

$$\varphi_A=\sum\frac{e_B}{R_{AB}}, \qquad (5\text{-}13)$$

其中，R_{AB} 是电荷 e_A, e_B 間的距离。能量的式子(5-11)包含两部分。第一，它包含一个无限大的常数，即电荷的“固有”能，它与电

[1] 量子效应在与 h/mc 同数量級的距离上就变得很重要了，此处的 h 是普朗克常数。

荷之間的相互位置无关。第二部分是电荷的相互作用能，它与电荷之間的相互位置有关。显然，物理学上关心的仅仅是第二部分。这部分等于

$$U'=\frac{1}{2}\sum e_A\varphi'_A, \tag{5-14}$$

其中，

$$\varphi'=\sum_{A\neq B}\frac{e_B}{R_{AB}} \tag{5-15}$$

是除了 e_A 以外的所有电荷在 e_A 所在点产生的势。換句話說，我們可以写

$$U'=\frac{1}{2}\sum_{A\neq B}\frac{e_Ae_B}{R_{AB}}. \tag{5-16}$$

就特例言之，两个粒子的相互作用能是

$$U'=\frac{e_1e_2}{R_{12}}. \tag{5-17}$$

§ 5-3. 等速运动电荷的場

我們来求一个以 V 等速运动的电荷 e 所产生的場。我們称静止参考系統为 K 系統；称随电荷一起运动的参考系統为 K' 系統。設电荷位于 K' 系統的坐标原点，系統 K' 沿 X 軸对 K 作相对运动，Y 軸与 Z 軸平行于 Y' 与 Z'。在 $t=0$ 的瞬間，两个系統的原点相重合。因此，电荷在 K 系統中的坐标是 $x=Vt, y=z=0$。在 K' 系統中，我們有一个恒定电場，它的矢势 $\mathbf{A}'=0$，而它的标势則等于 $\varphi'=\frac{e}{R'}$，式中 $R'^2=x'^2+y'^2+z'^2$。按照(3-60)，当 $\mathbf{A}'=0$ 时，在 K 系統中，

$$\varphi=\frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{e}{R'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{5-18}$$

現在我們应当用 K 系統中的 x, y, z 来表示 R'。按照洛倫兹变

換公式，

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

由此得到

$$R'^2 = \frac{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{5-19}$$

将此式代入(5-18)，就得到

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \tag{5-20}$$

式中，我們引入了記号 R^*：

$$R^{*2} = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2). \tag{5-21}$$

在 K 系統中[見(3-60)]，矢势等于

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{5-22}$$

在 K' 系統中，磁場 $\mathbf{H}'$ 不存在；而电場則是

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

从公式(3-64)，我們得到

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

$$E_z = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

将用 x, y, z 表示的 R', x', y', z' 的式子代入，就得到

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{5-23}$$

式中，$\mathbf{R}$ 是从电荷 e 到以 x, y, z 为坐标的点(我們正在求这一点

的場)的矢徑(它的分量是 $x-Vt, y, z$)。

假如我們引入运动方向与矢徑所夹之角 θ, $\mathbf{E}$ 的表示式可以写成另一形式。显然, $y^2+z^2=R^2\sin^2\theta$, 所以 R^{*2}(5-21)可以写成下面的形式:

$$R^{*2}=R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right). \tag{5-24}$$

于是,对于 $\mathbf{E}$, 我們就有

$$\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{5-25}$$

在离电荷的距离为 R 时, 若 θ 从零增加到 $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{或者 } \theta \text{ 从 } \pi \text{ 减至 } \frac{\pi}{2}\right)$, 則場 E 的值将随着增加。沿着运动方向的場 $E_{\parallel}$($\theta=0$, 或 π)将有最小值; 它等于

$$E_{\parallel}=\frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

最大的場与速度垂直 $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$, 并等于

$$E_{\perp}=\frac{e}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

我們要注意,当速度增加时,場 $E_{\parallel}$ 減小,而 $E_{\perp}$ 則增大。我們可以形象地叙述这种現象:一个运动电荷的电場在运动的方向"收縮"。对于一个同光速接近的速度 V, 公式(5-25)中的分母在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的附近的一个狹小范圍內接近于零。这个范圍的"寬度"的数量級为

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

因此,仅仅在赤道平面的邻近的一个狹小角度范圍內,一个快速运

动着的电荷的电場是大的，而这个范圍則随着 V 的增加而減小，其減小的情况如同 $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$。在这个范圍以外，場減小得很快。

在 K 系統內，磁場等于 $\mathbf{H}=\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{E}$ [見(3-67)]。在 $V\ll c$ 的情况下，从(5-23)，我們近似地得到 $\mathbf{E}=\frac{e\mathbf{R}}{R^3}$，因此

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c}\frac{\mathbf{V}\times\mathbf{R}}{R^3}. \tag{5-26}$$

§5-4. 庫侖場內的运动

我們来研究一个質量为 m、电荷为 e 的粒子在另一个电荷 e' 所产生的場內的运动；我們假設第二个电荷的質量比 m 大得如此之多，以致我們可以把第二个电荷当作固定的。这样一来，我們的問題就化成了研究一个电荷 e 在中心对称电場$\left(\text{其势为 } \varphi=\frac{e'}{r}\right)$內的运动。

粒子的(总)能量 $\mathscr{E}$ 等于

$$\mathscr{E}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}+\frac{\alpha}{r},$$

式中，$\alpha=ee'$。假如我們在粒子的运动平面內采用極坐标，那么，我們就可以写出冲量 $p^2=\left(\frac{M^2}{r^2}\right)+p_r^2$，此处的 p_r 是冲量的徑向分量，而 M 則是質点的恒定冲量矩。这时，

$$\mathscr{E}=c\sqrt{p_r^2+\frac{M^2}{r^2}+m^2c^2}+\frac{\alpha}{r}. \tag{5-27}$$

現在我們来討論粒子能否随意地接近中心的問題。首先，很容易看出，假如 e 同 e' 相互排斥的，即 e 同 e' 有同样的符号，那么，这种接近就永为不可能。此外，在相互吸引的情形下(e 同 e' 有相反的符号)，假如 $Mc>|\alpha|$，随意接近中心是不可能的，因为在这种情况下，(5-27)式中的第一項永比第二項为大，並且当 $r\to 0$ 时，方

程的右边就要变为无限大。反之，假如 $Mc<|\alpha|$，那么，当 $r\to 0$ 时，这个式子可以保持有限值（在此，不用說，p_r 趋向无限大）。因此，假如

$$cM<|\alpha|, \tag{5-28}$$

粒子在运动过程中"降落"到吸引它的电荷上，这与非相对論力学不同，在非相对論力学中，这样的"降落"一般是不可能的（有一个例外，仅仅是 $M=0$ 的情形除外，这时 e 沿着一条直綫飞向 e'）。

为了完全决定一个电荷在一个庫命場內的运动，从哈密頓-雅可畢方程出發是最便利的。我們在选擇極坐标 r, φ 在运动平面內。哈密頓-雅可畢方程（3-11）可以写成

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\alpha}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+m^2c^2=0.$$

我們来寻求下面形式的 S：

$$S=-\mathscr{E}t+M\varphi+f(r),$$

式中，$\mathscr{E}$ 及 M 是运动質点的恒定能及恒定冲动矩。結果我們求得

$$S=\mathscr{E}-t+M\varphi+\int\sqrt{\left(\frac{\mathscr{E}-\frac{\alpha}{r}}{c}\right)^2-\frac{M^2}{r^2}-m^2c^2}\cdot dr. \tag{5-29}$$

軌道由方程 $\frac{\partial S}{\partial M}=$ 常数决定。积分后，得到下面的結果：

(a) 假如 $Mc>|\alpha|$，

$$(c^2M^2-\alpha^2)\frac{1}{r}=$$

$$=c\sqrt{(M\mathscr{E})^2-m^2c^2(M^2c^2-\alpha^2)}\cos\left(\varphi\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2M^2}}\right)-\mathscr{E}\alpha; \tag{5-30}$$

(b) 假如 $Mc<|\alpha|$，

$$(\alpha^2-c^2M^2)\frac{1}{r}=$$

$$=\pm c\sqrt{(M\mathscr{E})^2+m^2c^2(\alpha^2-M^2c^2)}\,\mathrm{ch}\left(\varphi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2}-1}\right)+\mathscr{E}\alpha; \tag{5-31}$$

(c) 假如 $Mc=|\alpha|$,

$$\frac{2\mathscr{E}\alpha}{r}=\mathscr{E}^2-m^2c^4-\varphi^2\left(\frac{\mathscr{E}\alpha}{cM}\right)^2. \tag{5-32}$$

积分常数已經包含在角 φ 的計算起点的任意选擇內了。

在(5-30)式中，平方根前面的符号的选擇并不重要，因为余弦符号后的角 φ 的計算起点的选擇是任意的。在相互吸引的情形下($\alpha<0$),假如 $\mathscr{E}<mc^2$, 与这个方程相对应的軌道上，r 之値皆为有限(有限运动)。假如 $\mathscr{E}>mc^2$,那么，r 可以是无限大(无限运动)。在非相对論力学中，有限运动与在閉合軌道(橢圓)上的运动相对应。从(5-30)式可以看出，在相对論力学中，軌道不可能是封閉的；当 φ 变动 2π 时，到中心的距离 r 并不回到它的原来的値。我們得到的軌道不是橢圓,而是張开的薔薇形。因此,在非相对論力学中，在庫侖場中的有限运动的軌道是封閉的，而在相对論力学中,庫侖場就失去了这个特性。

在(5-31)式中,当 $\alpha<0$ 时,根号前应当选擇正号，而当 $\alpha<0$ 时,就应当选擇負号[符号的另一种选擇对应于(5-27)式中的根号前的符号改变]。

在 $\alpha<0$ 的情况下,軌道(5-31)及(5-32)是螺綫,当 $\varphi\to\infty$ 时,距离 $r\to 0$。电荷"降落"到坐标原点所需要的时間是有限的。这可以从下面看出。r 的坐标与时間的关系是由方程 $\frac{\partial S}{\partial\mathscr{E}}=$ 常数决定的；将(5-29)代入，我們看出，决定时間的积分当 $r\to 0$ 时是收斂的。

習 題

1. 求一个电荷在排斥的庫侖場($\alpha>0$)中飞行时的偏轉角。

解：偏轉角 $\chi=\pi-2\varphi_0$, 此处 φ_0 是軌道(5-30)的两个漸近綫所夹之角。我們求得

$$\chi=\pi-\frac{2cM}{\sqrt{c^2M^2-\alpha^2}}\tan^{-1}\left(\frac{v\sqrt{c^2M^2-\alpha^2}}{c\alpha}\right),$$

式中，v 是电荷在无穷远处的速度。

2. 求質点在庫侖場中微偏角散射的有效截面。

解: 有效截面 $d\sigma$ 是在一秒鐘内散射到一个一定的立体角元 do 内的粒子数与被散射粒子的通量密度(即每秒經过垂直于粒子束的一平方厘米面积的粒子数)之比①。

既然粒子在通过場时的偏轉角 χ 由"瞄准距离" ρ 决定(ρ 即从中心到一条直綫的距离，这条直綫就是粒子在場不存在时所应該沿着运动的直綫)，

$$d\sigma=2\pi\rho d\rho=2\pi\rho\frac{d\rho}{d\chi}d\chi=\rho\frac{d\rho}{d\chi}\frac{do}{\sin\chi},$$

式中，$do=2\pi\sin\chi d\chi$。偏轉角(如果很小)可以認为等于冲量的变化对于它的初值之比。冲量的变化等于作用于电荷上的力的时間积分。这个力在垂直于运动方向的分量近似地等于 $\frac{\alpha\rho}{r^2 r}$。因此，我們得到

$$\chi=\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha\rho dt}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}}=\frac{2\alpha}{p\rho v}$$

(v 是粒子的速度)。从而，我們求得在小 χ 情况下的有效面：

$$d\sigma=4\left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2\frac{do}{\chi^4}.$$

§ 5-5. 偶極矩

我們現在来研究一个电荷体系在与这个体系相距很远之处所产生的場，所謂很远之处，就是說該处与体系的距离比这个体系中各电荷間的距离大得多。

我們引用一个坐标系統，它的原点是在电荷体系内的任意一点上。設各电荷的矢徑为 $\mathbf{r}_A$。我們来求所有电荷在以 $\mathbf{R}_0$ 为矢徑的点所生的場的势。根据 § 5-1 的結果，这个場的势是

$$\phi=\sum_A\frac{e_A}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_A|}\tag{5-33}$$

(求和必須遍及所有电荷)；式中，$\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_A$ 是从电荷 e_A 到我們正在求势的点的矢徑。为此，我們将(5-33)展开为 $\frac{\mathbf{r}_A}{\mathbf{R}_0}$ 的幂級数，利用公式

① 可以参看，比方說，本教程第一卷"力学"§ 18。

$$f(\mathbf{R}_0-\mathbf{r})=f(\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}\cdot\text{grad}\, f(\mathbf{R}_0)$$

(在 grad 内，是对矢量 $\mathbf{R}_0$ 的端点坐标进行微分)。

准确到一級項，

$$\varphi=\frac{\Sigma e_A}{R_0}-\sum e_A\,\mathbf{r}_A\cdot\text{grad}\frac{1}{R_0}. \tag{5-34}$$

我們称

$$\mathbf{d}=\Sigma\, e_A\,\mathbf{r}_A \tag{5-35}$$

为电荷体系的偶極矩。应該注意，假如所有的电荷之和为零，即 $\Sigma e_A=0$，那么，偶極矩就与坐标原点的选擇无关，因为同一个电荷在两个不同的坐标系統中的矢徑 $\mathbf{r}_A$ 及 $\mathbf{r}'_A$ 有下面的关系：

$$\mathbf{r}'_A=\mathbf{r}_A+\mathbf{a},$$

式中，$\mathbf{a}$ 是一个常矢量。因此，假如 $\Sigma e_A=0$，偶極矩在两个系統中是相等的：

$$\mathbf{d}'=\Sigma e_A\mathbf{r}'_A=\Sigma e_A\mathbf{r}_A+\mathbf{a}\Sigma e_A=\mathbf{d}.$$

假如我們用 e_A^+, $\mathbf{r}_A^+$ 和 e_A^-, $\mathbf{r}_A^-$ 代表这个体系的正电荷和負电荷以及它們的矢徑，那么，我們可以将偶極矩写成

$$\mathbf{d}=\Sigma e_A^+\mathbf{r}_A^+-\Sigma e_A^-\mathbf{r}_A^-=\mathbf{R}^+\Sigma e_A^+-\mathbf{R}^-\Sigma e_A^-, \tag{5-36}$$

式中，

$$\mathbf{R}^+=\frac{\Sigma e_A^+\mathbf{r}_A^+}{\Sigma e_A^+},\quad \mathbf{R}^-=\frac{\Sigma e_A^-\mathbf{r}_A^-}{\Sigma e_A^-} \tag{5-37}$$

是正电荷及負电荷的"电荷中心"。假如 $\Sigma e_A^+=\Sigma e_A^-=e$，那么，

$$\mathbf{d}=e\mathbf{R}_{+-}, \tag{5-38}$$

式中，$\mathbf{R}_{+-}=\mathbf{R}^+-\mathbf{R}^-$ 是从正电荷中心到負电荷中心的矢徑。就特殊情形言之，假如只有两个电荷，那么，$\mathbf{R}_{+-}$ 就是这两个电荷間的矢徑。

假如 $\Sigma e_A=0$，那么，这个体系在远距离处的場的势是

$$\varphi=\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_0}{R_0^3} \tag{5-39}$$

$\left(\text{我們代入了 grad}\,\frac{1}{R_0}=-\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right)$。知道了势，我們就可以求出場 $\mathbf{E}$：

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi=-\operatorname{grad}\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_0}{R_0^3}=$$

$$=-\frac{1}{R_0^3}\operatorname{grad}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_0)-(\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_0)\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}.$$

按照公式 $\operatorname{grad}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}_0)=\mathbf{d}$，并且注意到 $\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}=-\frac{3\mathbf{R}_0}{R_0^5}$，我們可求得場 $\mathbf{E}$ 的表示式

$$\mathbf{E}=\frac{3(\mathbf{R}_0\cdot\mathbf{d})\mathbf{R}_0-R_0^2\mathbf{d}}{R_0^5}. \tag{5-40}$$

因此，一个 $\sum e_A=0$ 的电荷体系所产生的場的势与到这个体系的距离的平方成反比，而場的强度則与距离的立方成反比。

§ 5-6. 多極矩

在势按 $1/R_0$ 的冪展开的展开式

$$\varphi=\varphi^{(1)}+\varphi^{(2)}+\varphi^{(3)}+\cdots$$

中，$\varphi^{(n)}$ 这一項与 $1/R_0^n$ 成正比。我們看出，第一項 $\varphi^{(1)}$ 为所有电荷的和所决定；第二項 $\varphi^{(2)}$ 有时称为体系的偶極势，为体系的偶極矩所决定。

展开式中的第三項 $\varphi^{(3)}$ 显然等于

$$\varphi^{(3)}=\frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right), \tag{5-41}$$

式中的求和应对所有电荷进行；我們在此沒有写电荷的編号；x_α 是矢量 $\mathbf{r}$ 的分量，X_α 是矢量 $\mathbf{R}_0$ 的分量。

势的这一部分通常称为四極势。假如体系的电荷的和及偶極矩的和都等于零，展开式就从 $\varphi^{(3)}$ 开始。

在(5-41)式中，有六个量 $\sum e x_\alpha x_\beta$ 出現。但是，很容易看出，場实际上并不与六个独立的量有关，而仅与五个独立的量有关。这是因为函数 $1/R_0$ 滿足拉普拉斯方程，即

$$\Delta\left(\frac{1}{R_0}\right)=\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha^2}\left(\frac{1}{R_0}\right)=0.$$

这个等式可以写成如下的形式：

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right)=0.$$

因此，我們可以将 $\varphi^{(3)}$ 写成下面的形式：

$$\varphi^{(3)}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right).$$

張量

$$D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}) \tag{5-42}$$

称为这个体系的四極矩。

从 $D_{\alpha\beta}$ 的定义，很容易看出，对角綫上的元素之和为零：

$$D_{\alpha\alpha}=0. \tag{5-43}$$

因此对称張量 $D_{\alpha\beta}$ 一共有五个独立的分量。利用 $D_{\alpha\beta}$，我們可以写出

$$\varphi^{(3)}=\frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\left(\frac{1}{R_0}\right). \tag{5-44}$$

我們可以用完全相似的方法来表示 φ 的展开式中的以后各项。第 n 項被一个 n 阶張量所决定，这个張量是由电荷和电荷的矢徑的分量所构成的。这个張量称为这个体系的多極矩。所有这些張量对于全部指标都是对称的，而且当对于任何一对指标縮并时，所得結果为零①。可以証明，n 級多極矩的張量一共有 $2n-1$ 个独立分量。

5-7. 外場中的电荷体系

現在我們来研究一个位于外电場中的电荷体系 $e_1, e_2, \cdots$。我們用 φ_A 表示电荷 e_A 所在点的外电場的势。每个电荷的势能是 $e_A\varphi_A$，而这个体系的总势能則是

$$U=\sum e_A\varphi_A.$$

① 所謂張量的縮并，是使两个指标相等，再对它們求和；在这个过程中，張量的阶将减少 2。

我們仍然采用原点在电荷体系內一任意点上的坐标系統；$\mathbf{r}_A$ 是电荷 e_A 在这个坐标系統中的矢徑。

假設外場在电荷体系所在的区域中緩慢地变化。这时，我們可以将能量 U 展开为 $\mathbf{r}_A$ 的冪級数。

在展开式

$$U=U^{(1)}+U^{(2)}+U^{3}+\cdots,$$

中，第一項是

$$U^{(1)}=\varphi_0\sum e_A, \tag{5-45}$$

式中，φ_0 是势在坐标原点之値。在这个近似中，体系的能量同所有的电荷都集中在一点(坐标原点)时的能量一样。

展开式中的第二項是

$$U^{(2)}=\operatorname{grad}\varphi_0\cdot\sum e_A\mathbf{r}_A,$$

式中，$\operatorname{grad}\varphi_0$ 是在原点的势的梯度値；既然 $\operatorname{grad}\varphi=-\mathbf{E}$，那么 $\operatorname{grad}\varphi_0$ 就应該是在原点的电場强度 $\mathbf{E}_0$。引入系統的偶極矩 $\mathbf{d}$，我們得到

$$U^{(2)}=-\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}_0. \tag{5-46}$$

对于一个均匀場，$U^{(2)}$ 的表示式也可以直接从势的表示式(3-25)得出。

展开式中的次一項 $U^{(3)}$ 是

$$U^{(3)}=\frac{1}{2}\sum ex_\alpha x_\beta\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}.$$

在这里，也象在 §5-6 中一样，我們略去了电荷編号的指标；$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}$ 是在原点的势的二次导数；但是势 φ 滿足拉普拉斯方程，

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2}=\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}=0.$$

因此，我們可以将 $U^{(3)}$ 写成下面的形式：

$$U^{(3)}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\,\Sigma e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}r^2\right)$$

或

$$U^{(3)}=\frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},\tag{5-47}$$

式中，$D_{\alpha\beta}$ 是四極矩的分量(見§5-6)。

假設有两个电荷体系，每一个体系的总电荷为零，而偶極矩則有 $\mathbf{d}_1$ 及 $\mathbf{d}_2$。两个体系的距离比体系本身的尺寸大很多。我們来求他們的相互作用势能 U。为此，我們将两个体系中的一个認为处在另一个体系的場中。这时，

$$U=-\mathbf{d}_2\cdot\mathbf{E}_1,$$

式中，$\mathbf{E}_1$ 是第一个体系的場。将 $\mathbf{E}_1$ 的表示式(5-40)代入，我們得到

$$U=\frac{(\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2)R^2-3(\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{R})(\mathbf{d}_2\cdot\mathbf{R})}{R^5},\tag{5-48}$$

式中，$\mathbf{R}$ 是两个体系間的距离矢量。

假如体系之一的总电荷不为零(而等于 e)，則同理可得

$$U=e\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{R}}{R^3},\tag{5-49}$$

式中，$\mathbf{R}$ 是一个矢量，从偶極子(总电荷为零的体系)指向电荷(总电荷为 e 的体系)。我們不拟求四極子(总电荷为零，偶極矩也为零的体系)与一个电荷，与一个偶極子，或者与一个四極子相互作用的类似表示式；我們只提一下，相应的势能与距离的三次方，四次方，及五次方成反比。

§5-8. 恒定磁場

我們来研究一个作稳定运动的电荷体系所产生的磁場。所謂稳定运动就是說从头到尾，电荷絕对不从无穷远处跑来，也不跑到无穷远处去，在一切时間都在空間的有限区域內运动。此外，我們假設所有电荷的冲量在一切时間都是有限的。因此，所有的量都在有限范圍內变化，考虑它們的时間平均值是饒有兴趣的。就特

例言之，我們可以考慮电荷所产生的磁場的平均値 $\overline{\mathbf{H}}$，这个平均磁場現在将仅是坐标的函数，而不是时間的函数，亦即是恒定的。

为了求出平均場 $\overline{\mathbf{H}}$ 的方程，我們先对麦克斯韋方程 $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$，$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$ 取时間平均值。这些方程中的第一个簡單地給出

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{H}}=0. \qquad (5\text{-}50)$$

在第二个方程中，导数 $\partial\mathbf{E}/\partial t$ 的平均値，正象在一般情况下任何一个在有限范圍内变化的量的导数的平均値一样，为零（見§4-9的脚注）。因此，第二个麦克斯韋方程化为

$$\operatorname{rot}\overline{\mathbf{H}}=\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \qquad (5\text{-}51)$$

这两个方程就是决定恒定場 $\overline{\mathbf{H}}$。

我們按照 $\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}=\overline{\mathbf{H}}$

引入平均矢势 $\overline{\mathbf{A}}$。将这个方程代入（5-51）。因为 $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}$，所以我們可得

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}}-\Delta\overline{\mathbf{A}}=\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

但是我們知道，場的矢势未被唯一地确定，因而我們可以加一个任意的补助条件。根据这点，我們这样来选擇矢势 $\overline{\mathbf{A}}$，使

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{A}}=0. \qquad (5\text{-}52)$$

这时，确定恒定磁場的矢势的方程化为

$$\Delta\overline{\mathbf{A}}=-\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \qquad (5\text{-}53)$$

很容易求解这个方程，因为(5-53)式与恒定电場的标势的泊松方程(5-4)完全相似，不过在那里的电荷密度 ρ 被这里的电流密度 $\overline{\mathbf{j}}/c$ 所代替而已。与泊松方程的解(5-8)相似，我們可以直接写出

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{c}\int\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}dV, \qquad (5\text{-}54)$$

式中，R 是从我們求 $\overline{\mathbf{A}}$ 的那一点到体积元 dV 的距离。

在公式(5-54)中，如果我們用 $\rho\mathbf{V}$ 代替 $\mathbf{j}$，并且記住所有的电荷都是点电荷，我們就可以从积分过渡到对电荷求和了。在这里，我們必須記着，在积分(5-54)中，R 不过是一个积分变量，因此，它在求平均值的过程中不起作用。假如我們用和 $\sum \frac{e_A\mathbf{V}_A}{R_A}$ 代替 $\int \frac{\mathbf{j}}{R}dV$，那么，$R_A$ 就是各个粒子的矢徑，这些矢徑在电荷运动时是变动的。因此，我們应該写

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c}\sum \overline{\frac{e_A\mathbf{V}_A}{R_A}}, \tag{5-55}$$

此处我們是对求和記号下的整个式子求平均值。

知道了 $\overline{\mathbf{A}}$，我們就可以求出磁場，

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R}dV.$$

算符 rot 只关系着我們求場的那一点的坐标，因此，rot 可以写在积分号內，而在微分的过程中，$\mathbf{j}$ 可以当作常数。将熟知的公式

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad} f\times\mathbf{a}$$

(式中的 f 和 $\mathbf{a}$ 是任意的标量及矢量)，应用到 $\mathbf{j}\cdot 1/R$，我們得

$$\operatorname{rot}\frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} = \operatorname{grad}\frac{1}{R}\times\overline{\mathbf{j}} = \frac{\overline{\mathbf{j}}\times\mathbf{R}}{R^3},$$

因此，

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\int\frac{\overline{\mathbf{j}}\times\mathbf{R}}{R^3}dV \tag{5-56}$$

(矢徑 $\mathbf{R}$ 是从 dV 指向我們求它的場的那一点)。这就是所謂畢奥-薩伐尔定律。

§ 5-9. 磁矩

現在我們来研究一个稳定运动着的电荷体系在与电荷体系相距很远的地方所产生的平均磁場，所謂很远，就是說与电荷体系的

距离远大于电荷体系本身的尺寸。

我們引入一个坐标系統，讓坐标原点在电荷体系內任意一点上，象在第 § 5-5 中所作的一样。我們仍以 $\mathbf{r}_A$ 代表各个电荷的矢徑，而以 $\mathbf{R}_0$ 代表我們正在求場的那一点的矢徑，那么，$\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_A$ 就是从电荷到求場的那一点的矢徑。按照(5-55)式，对于矢势我們有

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{c}\sum\overline{\frac{e_A\mathbf{V}_A}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_A|}}. \tag{5-57}$$

象在 § 5-5 中一样，我們将上式展开为 $\mathbf{r}_A$ 的冪級数。如果只要求准确到第一阶，我們有(略去指标 A)

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{cR_0}\Sigma e\overline{\mathbf{V}}-\frac{1}{c}\Sigma e\overline{\mathbf{V}\left(\mathbf{r}\cdot\nabla\frac{1}{R_0}\right)}.$$

在第一項中，我們可以写出

$$\Sigma e\overline{\mathbf{V}}=\overline{\frac{d}{dt}\Sigma e\mathbf{r}}.$$

但是在一个有限范圍內变化的量的导数的平均值(如 $\Sigma e\mathbf{r}$ 的导数的平均值)为零。因此，对于 $\overline{\mathbf{A}}$，余下来的式子是

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{cR_0^3}\Sigma e\overline{\mathbf{V}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)}$$

(我們已經将 $\nabla\frac{1}{R_0}=-\frac{\mathbf{R}}{R_0^3}$ 代入了)。

我們将上式作如下改变。注意到 $\mathbf{V}=\dot{\mathbf{r}}$，我們可以写出(記着 $\mathbf{R}_0$ 是一个常矢量)

$$\Sigma e(\mathbf{R}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{V}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Sigma e\,\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)+\frac{1}{2}\Sigma e[\mathbf{V}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}_0)].$$

当把上式代入 $\overline{\mathbf{A}}$ 的表示式以后，第一項(包含有对时間的导数)的平均值又为零，我們得到

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{2cR_0^3}\Sigma e\overline{[\mathbf{V}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}_0)]}.$$

我們介紹一个叫做体系的磁矩的矢量

$$\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\Sigma e\mathbf{r}\times\mathbf{V}. \qquad (5-58)$$

这样，我們就得到 $\overline{\mathbf{A}}$ 的表示式

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{\overline{\mathfrak{m}}\times\mathbf{R}_0}{R_0^3}. \qquad (5-59)$$

知道了矢势，就很容易求得磁場。利用公式

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a},$$

我們得到

$$\overline{\mathbf{H}}=\operatorname{rot}\overline{\mathbf{A}}=\operatorname{rot}\left(\frac{\overline{\mathfrak{m}}\times\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right)=\overline{\mathfrak{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}-(\overline{\mathfrak{m}}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

其次，因为

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}=\mathbf{R}_0\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3}+\frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0=0,$$

$$(\mathfrak{m}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}=\frac{1}{R_0^3}(\mathfrak{m}\cdot\nabla)\mathbf{R}_0+\mathbf{R}_0(\mathfrak{m}\cdot\nabla)\frac{1}{R_0^3}=\frac{\mathfrak{m}}{R_0^3}-\frac{3\mathbf{R}_0(\mathfrak{m}\cdot\mathbf{R}_0)}{R_0^5},$$

所以

$$\overline{\mathbf{H}}=\frac{3\mathbf{R}_0(\overline{\mathfrak{m}}\cdot\mathbf{R}_0)-\mathfrak{m}R_0^2}{R_0^5}. \qquad (5-60)$$

由上式可以看出，用磁矩表示磁場的公式，象用偶極矩表示电場的公式一样[见(5-40)式]。

假如体系內的所有电荷都有相同的荷質比，那么，我們就可以写出

$$\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\Sigma e\mathbf{r}\times\mathbf{V}=\frac{e}{2mc}\Sigma m\mathbf{r}\times\mathbf{V}.$$

假如所有电荷的速度 $v\ll c$，那么，$m\mathbf{V}$ 就是电荷的冲量 $\mathbf{p}$，于是我們得到

$$\mathfrak{m}=\frac{e}{2mc}\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\frac{e}{2mc}\mathbf{M}, \qquad (5-61)$$

式中，$\mathbf{M}=\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 是体系的机械冲量矩。因此，在現在的情况下，磁矩与机械矩之比是一个常数，并且等于 $e/2mc$。

我們用 L_H 来代表由磁場决定的拉格朗日函数的补充項。在

一个恒定均匀磁場内，利用矢势的表示式(3-26)，我們得到：

$$L_H=\sum\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}=\sum\frac{e}{2c}\mathbf{H}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}=\sum\frac{e}{2c}\mathbf{r}\times\mathbf{V}\cdot\mathbf{H},$$

即

$$L_H=\mathfrak{m}\cdot\mathbf{H},\tag{5-62}$$

式中，$\mathfrak{m}$是电荷体系的磁矩。我們来注意同电場的相似情形，在均匀电場内，一个总电荷为零的电荷体系的拉格朗日函数包含有

$$L_E=\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}$$

的一項($\mathbf{d}$ 是电荷体系的偶極矩)，并且在这种情形下，就等于电荷体系的势能反号(見§5-7)。

我們現在考慮一个电荷体系，它們在一个中心对称的电場內作有限运动(其速度 $v\ll c$)，这个中心对称場是由某一个靜止电荷所产生的；所謂有限运动就是說，电荷永远留在空間的一个有限范圍之內。我們从靜止坐标系統变換到繞着通过靜止电荷的軸而匀速旋轉的坐标系統中去。根据熟知的公式，我們得到粒子在新坐标系統內的速度 $\mathbf{V}$ 与在旧坐标系統內的速度 $\mathbf{V}'$ 关系式

$$\mathbf{V}'=\mathbf{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$$

式中，$\mathbf{r}$ 是粒子的矢徑，而 $\boldsymbol{\Omega}$ 是旋轉坐标系統的角速度。在靜止坐标系統中，电荷体系的拉格朗日函数是

$$L=\sum\frac{mv'^2}{2}-U,$$

式中，U 是电荷体系在外場中的能量与它們彼此間的相互作用能之和。能量 U 是电荷体系內各电荷与靜止电荷之間的距离的函数，也是电荷体系內各电荷彼此間的距离的函数；当变換到旋轉坐标时，它显然保持不变。因此，在新坐标系統中，拉格朗日函数将是

$$L=\sum\frac{m}{2}(\mathbf{V}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})^2-U.$$

假如所有的电荷都有同样的荷質比 e/m，并假定

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{e}{2mc}\mathbf{H},\tag{5-63}$$

那么，在H足够小的情况下(当可以略去H^2时)，拉格朗日函数具有下面的形式：

$$L=\sum\frac{mv^2}{2}+\frac{1}{2c}\Sigma e\mathbf{H}\times\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}.$$

可以看出，这个式子与存在恒定磁場时，所研究的电荷在靜止坐标系統中运动的拉格朗日函数的表示式[见(5-62)式]一样。因此我們得出結論：一个电荷体系(所有的电荷的荷質比e/m都相等)在一中心对称的电場內同时又在弱的均匀磁場$\mathbf{H}$內作有限运动(速度$v\ll c$)，那么，这个电荷体系的行为就完全与同一电荷体系在同一电場中在一个以角速度(5-63)匀速旋轉的坐标系統內的行为一样(即所謂拉莫尔定理)。角速度$\Omega=\frac{eH}{2mc}$称为拉莫尔頻率。

我們要注意，假如我們只有一个粒子在磁場H內运动，那么，它在它的圓周軌道上的迴轉角速度等于(3-40)，即等于两倍拉莫尔頻率。

習　題

求由两个电荷(速度$v\ll c$)所組成的电荷体系的磁矩与机械矩的比。

解：选擇两个粒子的質量中心作为坐标的原点，我們便得到$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2=0$，及$\mathbf{p}_1=-\mathbf{p}_2=\mathbf{p}$，式中，$\mathbf{p}$是相对运动的冲量。利用这些关系，我們得到

$$\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2}+\frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\mathbf{M}.$$

第六章　电磁波

§6-1. 达朗貝尔方程

眞空中的电磁場可由 $\rho=0$, $\mathbf{j}=0$ 的麦克斯韋方程来决定，我們将这些方程再写一次:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{6-1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{6-2}$$

这些方程具有不为零的解。这就是說，即使沒有电荷，电磁場也能存在。

在沒有电荷存在的眞空中所出現的电磁場称为电磁波。我們現在来研究这种場的特性。

首先我們注意沒有电荷存在时的这种电磁場必定是随着时間而变化的。事实上，在相反的情形中，$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0$，方程(6-1)及(6-2)就变为恒定場的方程(5-1, 2)及(5-50, 51)了，不过这时在方程中 $\rho=0$, $\mathbf{j}=0$。但是这些方程的解(5-8)及(5-54)，在 $\rho=0$, $\mathbf{j}=0$ 时等于零。

我們現在来推导决定电磁波势的方程。

我們已經知道，由于势的非單值性，我們总可以使之服从某一附加条件。根据这点，我們可以这样来选擇电磁波的势，使标势滿足方程

$$\varphi=0. \tag{6-3}$$

这时，$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$，$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$。将这两个式子代入方程(6-2)的

第一个，得到

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{6-4}$$

虽然我們已經对势加上了一个附加条件，矢势 **A** 却仍未被完全唯一地确定。就是說，我們可以加在 **A** 上一个与时間无关的任意函数的梯度(这时不改变 φ)。就特例言之，我們可以这样选擇电磁波的势，使

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \tag{6-5}$$

实际上，将 $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 代入 div **E**＝0 内，得到

$$\text{div } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

这就是說，div **A** 与时間无关，而仅是坐标的函数。将一个适当的、与时間无关的函数的梯度加到 **A** 上，我們总可以使 div **A**＝0。

方程(6-4)現在变为

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{6-6}$$

这就是确定电磁波的势的方程。这个方程称为达朗貝尔方程或波动方程。

将算符 rot 及 $\partial/\partial t$ 应用于这个方程，我們可以証明电場 **E** 及磁場 **H** 滿足同一个波动方程。

算符 $\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 称为达朗貝尔算符，我們用符号□来代表：

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{6-7}$$

因而波动方程可以写成

$$\Box f = 0, \tag{6-8}$$

式中，f 是 **A**, **E** 或 **H** 的任意一个分量。达朗貝尔算符可以写成四度形式；显然，

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{6-9}$$

§ 6-2. 平面波

我們来研究电磁波一个特例，这种电磁波的場仅依賴于一个坐标，假定是 x（也依賴于时間）。这样的波称为平面波。在这种情形下，場的方程为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0 \tag{6-10}$$

式中，f 代表矢量 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的任意一分量。

为了解这个方程，我們将它改写为下面的形式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)f=0,$$

并且引入新变数

$$\xi=x-ct,\ \eta=x+ct.$$

很容易証明，

$$\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),\ \frac{\partial}{\partial \eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

因而 f 的方程变为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

将这个方程对 ξ 积分，得到

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}=F(\eta),$$

式中，$F(\eta)$ 是一个任意函数。再积分一次，就得到 $f=f_1(\xi)+$ $+f_2(\eta)$，此处的 f_1 及 f_2 是任意函数。因此，

$$f=f_1(x-ct)+f_2(x+ct). \tag{6-11}$$

例如，設 $f_2=0$，則 $f=f_1(x-ct)$。現在讓我們来說明这个解的意义。在每一 $x=$常数的平面內，場都因时間而变化；在不同的瞬間，場是因不同的 x 而不同。显然，对于满足 $x-ct=$常数的坐标 x 及时間 t 来說，場有相同的值，即

$$x=常数+ct.$$

这就是說，假如在某一瞬間 $t=0$，場在某一点 x 有一个一定的値，那么，在一个时間間隔以后，場在沿 X 軸与原来点相距 ct 处有同样的値。我們可以說，所有电磁場的値都以光速 c 在空間沿 X 軸傳播。

因此，$f_1(x-ct)$是向 X 軸正方向行进的平面波。很容易判断，$f_2(x+ct)$ 是沿着相反的方向，卽沿着 X 軸的負方向行进的平面波。

在 §6-1 中我們已經証明，电磁波的势可以如此地选擇，使 $\varphi=0$, $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$。我們也可以同样地选擇我們現在研究的平面波的势。因为所有的量都与 y 及 z 无关。所以 $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ 这个条件，在現在的情況下給出

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0.$$

按照(6-10)式，$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2}=0$，卽$\frac{\partial A_x}{\partial t}=$常数。但是导数 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 决定电場，而且我們可以看出，在現在的情形下，分量 A_x 不为零就意味着有一个縱向恒定电場存在。既然这样的电場与电磁波无关，我們可以使 $A_x=0$。

因此，平面波的矢势总可以被选擇得来垂直于 X 軸，卽垂直于这个波的傳播方向。

我們来考慮一个沿着 X 軸的正方向行进的平面波；在这个波里，所有的量，特别是 $\mathbf{A}$，仅仅是 $x-ct$ 的函数。从公式

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

我們得到

$$\mathbf{E}=\mathbf{A}',\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A}=\nabla(x-ct)\times\mathbf{A}'=\mathbf{n}\times\mathbf{A}', \qquad (6\text{-}12)$$

此处的一撇，表示对 $x-ct$ 的微分，則 $\mathbf{n}$ 則代表沿着波的傳播方向

的一个單位矢量。将第一个方程代入第二个，得到

$$\mathbf{H}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}. \tag{6-13}$$

从 $\mathbf{E}=\mathbf{A}'$ 及(6-13)式我們可以看出，平面波的电場 $\mathbf{E}$ 及磁場 $\mathbf{H}$ 都垂直于波的傳播方向。根据这个理由，电磁波称为横波。此外，从(6-13)式可見，平面波的电場和磁場是相互垂直的。从同一方程(6-13)也可以看出，平面波的电場的絕对值与磁場的絕对值是相等的。

我們还得求出平面波內的能流，即平面波的坡印廷矢量。我們有

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E}),$$

既然 $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}=0$, 所以

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n}=\frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

因此能流是沿着波的傳播方向。既然 $W=\frac{1}{8\pi}(E^2+H^2)=\frac{E^2}{4\pi}$ 是波的能量密度，按照場以光速傳播的事实，我們就可以写

$$\mathbf{S}=cW\mathbf{n}. \tag{6-14}$$

电磁波的每个單位体积內的冲量是 $\mathbf{S}/c^2$。对于平面波来說，它等于 $(W/c)\mathbf{n}$。我們应該注意电磁波的能量 W 与冲量 W/c 之間的关系，正如以光速运动着的質点的能量与冲量之間的关系一样(見 §2-8)。

場的冲量的通量是由能量—冲量張量的分量 $T_{\alpha\beta}$ 所决定的。假如选擇波的傳播方向为 X 軸的方向，我們求出 $T_{\alpha\beta}$ 的唯一不等于零的分量是

$$T_{xx}=W. \tag{6-15}$$

正如它所应当的一样，冲量的通量是沿着波的傳播方向，而且其絕对值等于能量密度。

假如电磁波落在一个吸收它的物体上，那么，这个物体将受到

一定的压力(所謂光压)。光压等于在單位时間內落在物体單位面积上的波的冲量的垂直(于物体表面的)分量。假如(曲面的)法綫与入射波成 θ 角,那么,光压就等于 $W\cos\theta$。在一般情形下,假如波不完全被吸收,而一部分从物体的表面反射回来,光压就等于入射波与反射波的冲量的絕对值之和。

§6-3. 單色平面波

电磁波的一个非常重要的特例，就是这样一种波，在这种波内,場是时間的簡單周期函数。这种波称为單色波。在單色波內,所有的量(势,場的分量等)以形如 $\cos(\omega t+\alpha)$的因子与时間發生关系。ω 这个量称为波的循环頻率(我們将簡称它为頻率)。波的周期是 $2\pi/\omega$。

在波动方程中，場对时間的二阶导数現在是 $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=-\omega^2 f$, 所以,对于單色波,場在空間的分布为方程

$$\Delta f+\frac{\omega^2}{c^2}f=0 \tag{6-16}$$

所决定。

在(沿着 X 軸傳播的)平面波內，場仅是 $x-ct$ 的函数。因此,假如平面波是單色的,那么它的場将是 $x-ct$ 的簡單周期函数。

这种波的矢势写成一个复数式的实数部分是最方便的了，即写成

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\} \tag{6-17}$$

(Re 意即实数部分)。这里，$\mathbf{A}_0$ 是某一个复常矢量。显而易見,这种波的場 $\mathbf{E}$ 与場 $\mathbf{H}$ 有相似的形式:

$$\mathbf{E}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\},$$

$$\mathbf{H}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{H}_0 e^{-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\},$$

两个場有同一的頻率 ω。

我們称

$$\lambda=2\pi c/\omega \tag{6-18}$$

为波長；它是場在給定瞬間 t 随坐标 x 而变化的周期。$\mathbf{A}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ 称为与它們相应的量的复数振幅。

由于麦克斯韋方程是綫性的，采用复数式就显得非常便利。因为用了复数式，所有的运算不是施之于三角式，而是施之于簡單得多的指数式，只要以后再取其实数部分就行了。今后我們将常常应用复数形式。这时不言而喻，我們应取相应的复数式的实数部分。

假如我們引入沿着波傳播方向的單位矢量 $\mathbf{n}$，那么（6-17）式可以写成

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\left(\omega t-\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}\right)}\right\}.$$

矢量

$$\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}=\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{6-19}$$

称为波矢量。因此，我們有

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\}, \tag{6-20}$$

以及 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的相似的表示式。

按照(6-12)式，場 $\mathbf{E}$ 及場 $\mathbf{H}$ 可以用 $\mathbf{A}$ 来表示；对于單色波，从这些公式我們得到

$$\mathbf{E}=ik\mathbf{A},\quad \mathbf{H}=i\mathbf{k}\times\mathbf{A}. \tag{6-21}$$

分量为

$$k_{1,2,3}=k_{x,y,z},\quad k_4=\frac{i\omega}{c} \tag{6-22}$$

的矢量 k_i 称为四度波矢量。引入了这个矢量，我們可以将(6-20)式写成

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{ik_i x_i}\right\}. \tag{6-23}$$

四度波矢量的平方

$$k_i^2=0. \tag{6-24}$$

把(46.8)代入达朗贝尔方程

$$\square\,\mathbf{A}=0,$$

可以直接根据定义导出上面的关系式。

习 题

求一个电荷在單色平面波 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\cos k(x-ct)$ 内的运动。

解：我們选择 Y 軸沿着 $\mathbf{A}$ 的方向；哈密頓-雅可畢方程是

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{e}{c}A_0\cos k(x-ct)\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+m^2c^2=0.$$

我們寻求下面形式的 S：

$$S=\alpha y+\beta z+\gamma(x+ct)+f(x-ct),$$

式中，α, β, γ 是常数，而 $f(x-ct)$ 是一个未知的函数，結果我們得到

$$S=\alpha y+\beta z+\gamma(x+ct)-\frac{1}{4\gamma}\left(\alpha^2+\beta^2+m^2c^2+\frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)(x-ct)+$$
$$+\frac{\alpha eA_0}{2\gamma k}\sin k(x-ct)-\frac{e^2A_0^2}{16\gamma kc}\sin 2k(x-ct).$$

要决定运动，我們必須使导数 $\frac{\partial S}{\partial\alpha}$，$\frac{\partial S}{\partial\beta}$，$\frac{\partial S}{\partial\gamma}$ 等于某些常数；只要坐标原点及时間的計算起点选择恰当，可以使这些常数为零。引入 $\eta=k(x-ct)$ 这个量，我們就得到确定运动的参数形式的方程

$$x=-\frac{1}{8\gamma^2k}\left(\alpha^2+\beta^2+m^2c^2+\frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)\eta+\frac{\eta}{2k}+$$
$$+\frac{\alpha eA_0}{4\gamma^2kc}\sin\eta-\frac{e^2A_0^2}{32\gamma^2kc^2}\sin 2\eta,$$

$$y=\frac{\alpha}{2\gamma k}\eta-\frac{eA_0}{2\gamma kc}\sin\eta,\quad z=\frac{\beta}{2\gamma k}\eta,$$

$$ct=-\frac{1}{8\gamma^2k}\left(\alpha^2+\beta^2+m^2c^2+\frac{e^2A^2}{2c^2}\right)\eta-\frac{\eta}{2k}+$$
$$+\frac{\alpha eA_0}{4\gamma^2kc}\sin\eta-\frac{e^2A_0^2}{32\gamma^2kc^2}\sin 2\eta.$$

电荷在其中平均說来是静止的坐标系統，对应着使 x, y, z 的表示式中 η 的系数为零的 α, β, γ 之值。在这个系統中，我們有

$$x=-\frac{a^2}{2k}\sin 2\eta,\ y=-\frac{2a}{k}\sin\eta,\ z=0,\ ct=-\frac{\eta}{k}-\frac{a^2}{2k}\sin 2\eta,$$

其中，

$$a=\frac{eA_0}{2c}\left(m^2c^2+\frac{e^2A_0^2}{2c^2}\right)^{-1}.$$

因此，电荷沿着一个封閉的8字形軌道(其軸沿着Y軸)运动。

§6-4. 多普勒效应

应用四度波矢量，很容易求出ω与$\mathbf{k}$从一个坐标系統到另外一个坐标系統的变换公式。四度矢量的一般变换公式(1-26)給出

$$k_4=\frac{k_4'+i\frac{V}{c}k_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

将分量k_i的值代入，则

$$\omega=\frac{\omega'+Vk_x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

但是$k_x=k\cos\alpha=\frac{\omega}{c}\cos\alpha$，式中的$\alpha$是$\mathbf{k}$与$X$軸所夹之角，因此，我們得到

$$\omega=\omega'\frac{1+\frac{V}{c}\cos\alpha'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{6-25}$$

这就是多普勒效应的准确公式。在$V\ll c$的情况下，这个公式化为

$$\omega=\omega'\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right). \tag{6-26}$$

对于$k_1=k_x$，我們有

$$k_x=\frac{k_x'+\frac{V}{c^2}\omega'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

将$k_x=\frac{\omega}{c}\cos\alpha$代入，则

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha'+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\alpha'}. \tag{6-27}$$

这个公式与在§1-5中所求出的光行差公式符合。

假如我們选擇X軸在波的傳播方向上，那么，正如所有平面波一样(见§6-3)，單色波的能量——冲量張量具有下列不为零的分量：

$$T_{11}=W,\quad T_{14}=iW,\quad T_{44}=-W.$$

假如引人四度波矢量k_i，我們可将这个关系用張量形式写为

$$T_{ik}=\frac{Wc^2}{\omega^2}k_ik_k. \tag{6-28}$$

乘积k_ik_k本身构成一个二阶对称張量。因此，从(6-28)式可以断定，W/ω^2是一个标量。因此，当我們从一个慣性坐标变换到另一个时，W/ω^2保持不变，而能量密度則应当象频率的平方一样变换。因此，注意到(6-28)式，我們就可得到下面的变换公式：

$$W=W'\frac{\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{6-29}$$

既然$W=E^2/4\pi=H^2/4\pi$，我們可以断定單色波的場的絕对値象频率的一次幂一样变换。

最后，我們应該注意，既然按照(6-29)式，W和W'不过是互成比例，那么，对于为一系列單色波的迭加之平面波，这个公式也能应用，就是說，实質上对任何平面波都能应用。

§6-5. 極化

我們現在来研究平面單色波的电場

$$\mathbf{E}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\}$$

(这里所作的一切討論，同样适用于磁場)。$\mathbf{E}_0$ 是某一复矢量；它的平方 $\mathbf{E}_0^2$ 在一般情况下也是一个复数。显然 $\mathbf{E}_0$ 总可以表示如下：

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{i\alpha},$$

同时，我們这样来选擇 α，使矢量 $\mathbf{b}$（一般說来，它本身也是复数）的平方为实数。于是，电場取下面的形式：

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{b}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha)}\right\}. \tag{6-30}$$

我們将 $\mathbf{b}$ 写成 $\mathbf{b}_1 - i\mathbf{b}_2$ 的形式，此处的 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$ 是两个实矢量。既然 $b^2 = b_1^2 - b_2^2 - 2i\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_2$ 应当是实数，所以，$\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_2 = 0$，就是說 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$ 相互垂直。我們选擇 Y 軸和 Z 軸平行于 $\mathbf{b}_1$ 和 $\mathbf{b}_2$（X 軸是沿着波的傳播方向）。于是从(6-30)式，得到

$$E_y = b_1\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha), \tag{6-31}$$
$$E_z = b_2\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha).$$

系数 b_1 和 b_2 称为波的振幅；cos 和 sin 的幅角称为波的“相”。

从(6-31)式可直接得到

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \tag{6-32}$$

从这些公式可以看出，在空間的每一点，这种波的电場矢量在与 YZ 平面平行的平面內旋轉，而矢量的端点描繪出一个椭圓(6-32)。这样的波称为椭圓極化波。假如 $b_1 = b_2$，那么，椭圓(6-32)变为圓，就是說，电場矢量旋轉，而其絕对值不变。在这种情形下，我們称之为圓極化。

最后，假如 $b_1 = b_2 = 0$，那么，波的場处处永远平行于(或反平行于)同一个方向。在这种情形，波称为綫極化波或平面極化波①。显然，一个椭圓極化波可以当作两个平面極化波的迭加。

① 历史的傳統形成了一个不能令人滿意的名詞，按照这个傳統，所謂光的極化平面是磁場矢量所在的平面，而电場矢量所在的平面則称为光的振动平面。

§6-6. 光譜分解

每种波都可以表为不同頻率的單色波的迭加。在数学上，这就意味着，波的場可以展开为傅里叶級数或傅里叶积分。这种展开也称为“光譜分解”。

假如場在时間上是周期性的(周期为T)，那么，它就可以展开为傅里叶級数如下①：

$$f=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt}, \tag{6-33}$$

式中，$\omega_0=2\pi/T$，而“傅里叶分量”f_n等于

$$f_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f e^{i\omega_0 nt}dt. \tag{6-34}$$

我們注意，既然f是实数，那么，

$$f_{-n}=f_n^*. \tag{6-35}$$

---

① 为簡單起見，我們在此只考慮純周期性的場，这个場是純周期运动的电荷所产生的。然而我們必須記着，电荷体系的稳定运动(正确一些說，近似稳定运动)通常不是純周期性的，而是有条件周期性的(可以参看，例如，本教程第一卷“力学”，§62)。表征这种运动的不是一个周期，而是一个完全序列的許多不同的周期(相应地，是許多不同的頻率)。所有作为这个运动(及所产生的場)的特征的量不能展开为一个簡單傅里叶級数，而只能展开为一个推广的傅里叶級数，这个級数可以写成与(6-33)相似的形式如下：

$$f=\sum_{\omega} f_\omega e^{-i\omega t},$$

上式与(6-33)式的差別在于，求和不是施之于ω_0的整倍数的各种頻率，而是施之于有下列形式的頻率：

$$\omega=\sum_{l=1}^{s} n^{(l)}\omega^{(l)},$$

式中$n^{(1)}, n^{(2)}, \cdots, n^{(s)}$是正整数或負整数，而$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \cdots, \omega^{(s)}$是所謂运动的基本頻率。

波的平均强度(場的平方定为波的强度)有如下的形式:

$$\overline{f^2}=f_0^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|^2 \tag{6-36}$$

(求平均值时,我們必須記着,振蕩乘数如 $e^{\pm i\omega_0 nt}$ 的平均值为零)。因此,波的平均强度等于它的單色分量的强度之和。

一个非周期性的場 f 可以分解为傅里叶級数,只要 $f(t)$ 这个函数滿足一定的条件(滿足这些条件的函数通常在无穷远处为零)。这时,波的光譜分解为

$$f=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega e^{-i\omega t}d\omega, \tag{6-37}$$

式中,波的傅里叶分量是

$$f_\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}fe^{i\omega t}dt, \tag{6-38}$$

同时,与(6-35)式一样,

$$f_{-\omega}=f_\omega^*. \tag{6-39}$$

我們来研究积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f^2dt$, 并且用各种單色分量的强度来表示它。用(6-37)及(6-38)两式,我們得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega e^{-i\omega t}d\omega=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}fe^{-i\omega t}dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f_\omega f_{-\omega}d\omega,$$

将 $f_{-\omega}=f_\omega^*$ 代入,则得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f_\omega|^2d\omega=4\pi\int_0^{\infty}|f_\omega|^2d\omega. \tag{6-40}$$

但是，这是时常遇到的是，場在实質上并不随着时間变化(特别是，在 $t=\pm\infty$ 时，場不为零)同时也不是严格周期性的。这样的場既不能展开为傅里叶級数，也不能展开为傅里叶积分（积分 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} fe^{i\omega t}dt$ 是發散的)。然而在这种情况下，我們可以将它展开为單色波如下。

我們考虑将 f 在某一較大的时間間隔 $-\frac{T}{2}$ 到 $+\frac{T}{2}$ 内展开为形如(6-33)傅里叶級数。现在我們来确定波的平均强度（經过时間間隔 T）。因为我們假定 T 是很大的，所以两个挨着的頻率之間的間隔 $\omega_0=2\pi/T$ 是很小的，因此求和的式子(6-36)可以化为对 $dn=d\omega/\omega_0$ 的积分：

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2dt=\frac{2}{T}\int\limits_0^{\infty}|f_n|^2\frac{d\omega}{\omega_0},$$

将(6-34)代入，則得

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f^2dt=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\pi T}\left|\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} fe^{i\omega t}dt\right|^2d\omega. \qquad (6\text{-}41)$$

因此平均强度可以用單色分量的强度的和或积分的形式来表示。公式(6-41)使我們能够計算在任一无限小的頻率間隔 $d\omega$ 中的强度。

当 $T\to\infty$ 时，$\overline{f^2}$ 趋近于某一有限的極限。由于这点，根据(6-41)式可以断定，当 T 趋向无穷大时，积分 $\int\limits_{-T}^{+T} fe^{i\omega t}dt$ 象 $\sqrt{T}$ 一样地增加。

§ 6-7. 部分極化的光

每一單色波，依照自己的定义，必定是極化的。然而，我們經常所遇到的波，它們仅仅是近似單色的，包含着小間隔 $\Delta\omega$ 中的各种不同頻率。我們考虑这种波，并且假設 ω 是它的某一中間頻率。这时，它在空間給定点的場可以写成 $\mathrm{Re}\{\mathbf{A}_0(t)e^{-i\omega t}\}$，此处的复数振幅 $\mathbf{A}_0(t)$ 是某一个变化得很慢的、时間的函数（对于严格單色波来說，$\mathbf{A}_0$ 就是常数了）。既然 $\mathbf{A}_0$ 决定波的極化（見 § 6-5），那么，这就是說，在波的每一点，極化随着时間变化；这样的波称之为部分極化波。但是在特殊情形下，$\mathbf{A}_0(t)$ 与时間的关系可能是这样的，就是波还是完全極化的。这种情况出現的必要条件是 $\mathbf{A}_0$ 的两个分量之比，即波的場的两个互相垂直的分量的（实）振幅之比，对时間而言是常数，而且它們的“相差”必須保持不变。

用实驗来观察电磁波的極化特性，就特例言之，观察光的極化特性，是将所研究的光通过各种物体（例如尼可尔三棱鏡），然后观察透过的光的强度。从数学的观点来看，这就是說，我們可以从波的場的某些二次函数的值得出关于光的極化特性的一些結論。在此，不言而喻，我們所研究的是这些函数的时間平均值。場的二次函数是一些与乘积 A_iA_k，$A_i^*A_k^*$，或 $A_iA_k^*$ 成比的項所构成的，此处的 A_i 是矢势的分量。形如 $A_iA_k=A_{0i}A_{0k}e^{-2i\omega t}$ 及 $A_i^*A_k^*=A_{0i}^*A_{0k}^*e^{2i\omega t}$ 的乘积包含着快速振蕩的因子 $e^{\pm 2i\omega t}$，当取时間平均值时，結果为零。形如 $A_iA_k^*=A_{0i}A_{0k}^*$ 的乘积不包含那种因子，因而它对时間的平均值不为零。由此可見，部分極化光的特性完全为張量

$$J_{ik}=\overline{A_{0i}A_{0k}^*} \qquad (6\text{-}42)$$

所决定。

既然矢量 $\mathbf{A}_0$ 总在垂直于波的方向的平面內，張量 J_{ik} 一共有

四个分量（在本节内，指标 i, k 应被了解为只取两个值，即 $i, k = 1, 2$）。从 J_{ik} 的定义，可以看出在这个張量的分量間存在着下面的关系：

$$J_{ik} = J^*_{ki}. \qquad (6\text{-}43)$$

我們将張量簡化一下。設 n_i 为"單位"复矢量，而且使之归一化，即使 $n_i n_i^* = 1$。我們这样来定义 n_i，使

$$J_{ik} n_k = \lambda n_i, \qquad (6\text{-}44)$$

正如将对称張量变到主軸一样。(6-44)式可以写成

$$(J_{ik} - \lambda \delta_{ik}) n_k = 0.$$

要这个 n_k 的一次齐次联立代数方程有异于零的解，行列式就必須等于零：

$$|J_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0, \qquad (6\text{-}45)$$

由此可以定出 λ 的两个値，用 λ_1 及 λ_2 代表之；将这两个値逐次代入(6-44)式，就得到两个矢量 $n_i^{(1)}$ 及 $n_i^{(2)}$。

很容易証明，λ_1 及 λ_2 这两个量是正实数，而矢量 $n_i^{(1)}$ 与 $n_i^{(2)}$ "互相垂直"，即满足下面的条件：

$$n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0. \qquad (6\text{-}46)$$

---

① 用 n_i^* 乘(6-44)的两边，得到

$$\lambda n_i n_i^* = \lambda = J_{ik} n_i^* n_k = \overline{|A_{0i} n_i|^2},$$

但是任何量的模的平方的平均値都是正实数。

为了証明(6-46)，我們写出方程

$$J_{ik} n_k^{(1)} = \lambda_1 n_i^{(1)}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} = \lambda_2 n_i^{(2)},$$

并且用 $n_i^{(2)*}$ 乘第一个方程，用 $n_i^{(1)*}$ 乘第二个方程：

$$J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_i^{(2)*}, \quad J_{ik} n_k^{(2)} n_i^{(1)*} = \lambda_2 n_i^{(2)} n_i^{(1)*}.$$

我們取第二个方程的共轭复数，并利用 $J^*_{ik} = J_{ki}$：

$$J^*_{ik} n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ki} n_k^{(2)*} n_i^{(1)} = J_{ik} n_k^{(1)} n_i^{(2)*} = \lambda_2 n_i^{(2)*} n_i^{(1)}.$$

然后，以第一个方程减去这个方程；就得到

$$(\lambda_1 - \lambda_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)*} = 0,$$

从此就得到(6-46)式。

現在我們可将張量 J_{ik} 写成

$$J_{ik}=\lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)*}+\lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)*}. \qquad (6-47)$$

用直接代入法，很容易証明这个式子实际上滿足方程(6-44)。

假如光是完全極化的，那么，$\mathbf{A}_0=$常数，J_{ik} 就簡單地等于 $A_{0i}A_{0k}^*$(不取平均値)。但是(6-47)的每一項都恰有这种形式——一个常矢量($\sqrt{\lambda_1}\,n_i^{(1)}$ 或 $\sqrt{\lambda_2}\,n_i^{(2)}$)的两个分量与其共軛复数之积。換句話說，每一項可以当作一个完全極化的(一般說来，橢圓極化的)波。此外，可以看出，在(6-47)內沒有一項含有这两个波的分量之积。这就是說，这两个波可以当作在物理上彼此无关，或者如通常所說，这两个波是不相干的。事实上，假如两个波彼此独立，那么，平均値 $\overline{A_i^{(1)}A_k^{(2)}}$ 就等于平均値 $\overline{A_i^{(1)}}$ 与平均値 $\overline{A_k^{(2)}}$ 之积 $\overline{A_i^{(1)}}\,\overline{A_k^{(2)}}$，既然它們每一个又都为零，当然 $\overline{A_i^{(1)}A_k^{(2)}}=0$。

在 § 6-5 中，我們已經看到，我們总能够选擇一个复数振幅，使得两个相互垂直的分量中的一个是純实数，而另外一个是純虛数；这时，它們的絕对值决定相应的振动的振幅。

因此，我們可以写

$$n_1^{(1)}=b_1,\quad n_2^{(1)}=ib_2, \qquad (6-48)$$

式中，b_1 及 b_2 是实数(因为归一化的条件 $n_i^{(1)*}n_i^{(1)}=1$，它們之間有关系式 $b_1^2+b_2^2=1$)。这时，$n_i^{(2)}$ 可以写成

$$n_1^{(2)}=ib_2,\quad n_2^{(2)}=b_1 \qquad (6-49)$$

(以使 $n_i^{(1)}n_i^{(2)*}=0$)。这些式子表明两个橢圓極化的振动的橢圓是相似的(有相同的長軸与短軸之比)，而其中的一个对于另一个旋轉了一个直角。

因此，我們得到了一个結果，即每一个部分極化波可以表为两个不相干的橢圓極化波的迭加，它們的極化橢圓是相似的，并且相互垂直。

光的总强度 J 与場的平方成正比，即与張量 J_{ik} 的对角分量

之和成正比：

$$J = J_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{6-50}$$

比值

$$\rho = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{6-51}$$

是小的 λ 对大者的 λ 之比，决定光的退極化程度。假如光是完全極化的，那么，λ_1 或 λ_2 之中的一个为零；显然，这时 $\rho=0$。在相反的情形下，$\lambda_1=\lambda_2$，所以 $\rho=1$，这样的光称为未極化的光，或称为普通光。(6-44)式在这种情形下只有一个根(对于 λ 而言)，这个事实説明了張量 J_{ik} 有下面的形式：

$$J_{ik} = \lambda_0 \delta_{ik}, \tag{6-52}$$

式中，λ_0 是 λ_1 与 λ_2 的共同的值。对于向量 n_i，这些方程給出无限多个值。換句話説，普通光可以当作两个極化波的迭加，这两个波的强度相等，而極化軸的方向(在垂直于光的方向的平面內)是任意的。

§6-8. 靜电場的分解

电荷所产生的場在形式上也可以分解为平面波(卽展开为傅里叶积分)。然而这种展开，在本質上是与电磁波在眞空中的展开不同的。事实上，电荷所产生的場并不滿足齐次的达朗貝尔方程(6-8)，因而这个展开式的每一項也不滿足这个方程。从此可以断定，电荷所产生的場所能展开的平面波，并不滿足 $k^2=\omega^2/c^2$ 这个关系，而这个关系对于平面單色波却是有效的。

就特例言之，假如我們形式地将靜电場表为平面波的迭加，这些波的"頻率"显然为零，因为所考虑的場与时間无关；波矢量当然不为零。

現在我們来考虑在坐标原点的点电荷 e 所产生的場。这个場的勢 φ 为方程

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r}) \tag{6-53}$$

所决定(見 § 5-1)。

我們将 φ 展开为傅里叶积分，即我們把它表为 $\varphi_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 形式的平面波的迭加:

$$\varphi = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_{\mathbf{k}} dk_x dk_y dk_z. \tag{6-54}$$

将拉普拉斯算符应用到这个方程的两边，我們得到

$$\Delta\varphi = -\iiint_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_{\mathbf{k}} dk_x dk_y dk_z,$$

所以，$\Delta\varphi$ 的表示式的傅里叶分量 $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$ 是

$$(\Delta\varphi)_k = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

另一方面，我們取方程(6-53)两边的傅里叶分量，就可以求得 $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$:

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} 4\pi e\delta(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dx dy dz = -\frac{e}{2\pi^2}.$$

比較 $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$ 的以上两个式子，得

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{2\pi^2}\frac{1}{k^2}. \tag{6-55}$$

这个公式解决了所提出的問題。

象对势 φ 一样，我們也可以展开場

$$\mathbf{E} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y dk_z, \tag{6-56}$$

利用(6-54)，得到

$$\mathbf{E}=-\text{grad}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,dk_xdk_ydk_z=$$

$$=-\iiint i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,dk_xdk_ydk_z.$$

同(6-56)相比較，得

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}=-i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}=-\frac{i\mathbf{k}}{k^2}\frac{e}{2\pi^2}. \tag{6-57}$$

从此可以看出，庫侖場可以分解的波的場是沿着波矢量方向。因此，这些波可以称为縱波。

§6-9. 場的本征振动

我們来考虑空間一定体积内的电磁場①。为了簡化以后的計算，假設这个体积的形状是一个長方体，其边是 A, B, C。这时我們可以将場的所有特征量在这个長方体内展开为三重傅里叶級数(按三个坐标)。这个展开式可以写成(例如对于矢势)：

$$\mathbf{A}=\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{6-58}$$

求和应对矢量 $\mathbf{k}$ 的所有可能值进行，矢量 $\mathbf{k}$ 的分量可取

$$k_x=\frac{2\pi n_x}{A},\quad k_y=\frac{2\pi n_y}{B},\quad k_z=\frac{2\pi n_z}{C} \tag{6-59}$$

各值，n_x, n_y, n_z 是正整数或負整数。系数 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ 必須满足关系式 $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}}=\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$，因为 $\mathbf{A}$ 必須是实数。从 $\text{div}\,\mathbf{A}=0$ 这个方程，对于每一个 $\mathbf{k}$，我們有

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{k}}=0, \tag{6-60}$$

就是說，复矢量 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ 垂直于其相应的波矢量 $\mathbf{k}$。向量 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ 当然是时間的函数；他們满足方程

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}+c^2k^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}}=0. \tag{6-61}$$

① 这里所指的是一个沒有电荷的場("自由輻射")。

假如体积的边 A, B, C 足够大，那么，k_x、k_y, k_z 的相邻的値(它們的 n_x, n_y, n_z 相差一个單位）彼此几乎相等。在这种情形下，我們可以談 k_x, k_y, k_z 在小間隔 Δk_x, $\Delta k_y, \Delta k_z$ 中的可能值的数目。

既然与 k_x 邻近值相应的 n_x 相差 1，那么，在間隔 Δk_x 內 k_x 可能值的数目 Δn_x 就簡單地等于 n_x 之値的相应的間隔。因此，得到

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta k_x,\ \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\Delta k_y,\ \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\Delta k_z.$$

分量在間隔 Δk_x, Δk_y、Δk_z 內的矢量 $\mathbf{k}$ 的可能值的总数 Δn 等于 $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$，即

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \tag{6-62}$$

式中，$V = ABC$ 是場的体积。

由此很容易决定其絕对値在間隔 Δk 內，而其方向在立体角元 Δo 內的波矢量可能値的数目。为此，我們只須在 "k_x, k_y, k_z 空間" 內变換到球坐标，并且用这个坐标表示的体积元来代替 $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$。因此，

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3}k^2 \Delta k \Delta o. \tag{6-63}$$

最后，絕对值 k 在間隔 Δk 內而方向任意的波矢量值的总数就是（以 4π 代 Δo）

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2}k^2 \Delta k. \tag{6-64}$$

作为时間函数的矢量 $\mathbf{A_k}$ 可以化为以 $\omega_\mathbf{k} = ck$ 为周期的簡單周期函数（見方程 6-61）。我們将場的展开式写成这样的形式，使它与行进平面波的展开式一样。为此，我們将級数(6-58)各項重新排一下，写成

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{a_k^*} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \tag{6-65}$$

（这个形式明白地显出 $\mathbf{A}$ 的实数性），并且認为每一个 $\mathbf{a_k}$ 通过因子 $e^{-i\omega_k t}$ 与时間發生关系：

$$\mathbf{A}_k \sim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{6-66}$$

(6·65)式内的每一项都仅是 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t$ 的函数，它与在矢量 $\mathbf{k}$ 方向傳播的波相应。

我們来計算場在体积 V 内的总能量

$$\mathscr{E} = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)dV,$$

把它表示为 $\mathbf{a}_k$ 的函数。对于电場，我們有

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum_k (\dot{\mathbf{a}}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{a}}_k^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}),$$

利用(6·66)，則

$$\mathbf{E} = i\sum_k k(\mathbf{a}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}). \tag{6-67}$$

对于磁場 $\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A}$，我們得到

$$\mathbf{H} = i\sum_k (\mathbf{k}\times\mathbf{a}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \mathbf{k}\times\mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}). \tag{6-68}$$

当求这些和的平方时，必須記着，所有的波矢量 $\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'$ 的二項之积在整个体积内积分时为零。事实上，这样的項含有形如 $e^{\pm i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ 的因子，$\mathbf{q}=\mathbf{k}\pm\mathbf{k}'$，而积分，例如

$$\int_0^A e^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,dx,$$

当 n_x 不为零时，等于零。同理，含有因子 $e^{\pm 2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 的积也等于零。在那些不包含指数因子的項中，对 dV 的积分恰恰等于体积 V。

結果，我們求得

$$\mathscr{E} = \frac{V}{4\pi}\sum_k \{k^2\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{a}_k^* + (\mathbf{k}\times\mathbf{a}_k)\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_k^*)\}.$$

但由于 $\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{k}=0$，所以我們有

$$(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_k)\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{a}_k^*) = k^2\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{a}_k^*.$$

于是我們最后得到

$$\mathscr{E}=\sum_{k}\mathscr{E}_{k},\ \mathscr{E}_{k}=\frac{k^2V}{2\pi}\mathbf{a}_{k}\cdot\mathbf{a}_{k}^{*}. \tag{6-69}$$

因此，場的总能量是用能量 $\mathscr{E}_{k}$ 之和来表示的，而 $\mathscr{E}_{k}$ 又与每一單个的平面波相联系的。

用同样的方法，我們可以計算場的总冲量

$$\frac{1}{c^2}\int \mathbf{S}dV=\frac{1}{4\pi c}\int \mathbf{E}\times\mathbf{H}dV,$$

并且得到

$$\sum_{k}\frac{\mathbf{k}}{k}\frac{\mathscr{E}_{k}}{c}. \tag{6-70}$$

从平面波的能量与冲量的关系（見 § 6-2），也可以預料到这个結果。

采用了展开式(6-65)[或(6-58)]，可用不連續的变数序列(向量 $\mathbf{a}_{k}$)来描述場，而不用連續的变数序列来描述[其实是用給空間各点以势 $\mathbf{A}(x, y, z, t)$的办法来描述]。我們現在將变数 $\mathbf{a}_{k}$ 作一个变換，使場的方程式变为与力学中哈密頓正則方程相似的形式。

我們引入实"正則变数" $\mathbf{Q}_{k}$ 及 $\mathbf{P}_{k}$，其关系如下：

$$\mathbf{Q}_{k}=\alpha(\mathbf{a}_{k}+\mathbf{a}_{k}^{*}),$$
$$\mathbf{P}_{k}=-i\omega_{k}\alpha(\mathbf{a}_{k}-\mathbf{a}_{k}^{*})=\dot{\mathbf{Q}}_{k}. \tag{6-71}$$

式中，α 是某一个实常数，这个常数我們以后要这样来决定，使"广义冲量"及"坐标"的关系 $\mathbf{P}_{k}=\dot{\mathbf{Q}}_{k}$ 实际上是运动方程的一个推論。

将用 $\mathbf{P}_{k}$ 及 $\mathbf{Q}_{k}$ 表示的 $\mathbf{a}_{k}$ 諸量代入能量表示式 (6-69)，就得到場的哈密頓函数：

$$\mathscr{H}=\sum_{k}\mathscr{H}_{k}=\sum_{k}\frac{V}{8\pi c^2\alpha^2}(\mathbf{P}_{k}^2+\omega_{k}^2\mathbf{Q}_{k}^2).$$

为了要使哈密頓方程 $\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{P}_{k}}=\dot{\mathbf{Q}}_{k}$ 与 $\mathbf{P}_{k}=\dot{\mathbf{Q}}_{k}$ 重合，必須使 $\frac{V}{8\pi c^2\alpha^2}=\frac{1}{2}$，即

$$\alpha=\sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}. \tag{6-72}$$

这时，哈密顿函数取下面的形式：

$$\mathscr{H}=\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{2}(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2+\omega_k^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2)=\sum_{\mathbf{k}}\mathscr{H}_{\mathbf{k}}. \tag{6-73}$$

“运动方程”

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}}=-\dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}},\quad \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{P}_{\mathbf{k}}}=\dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}$$

則变为方程

$$\ddot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{k}}+\omega_k^2\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}=0, \tag{6-74}$$

就是說，它們同場方程完全一样了。

矢量 $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ 及 $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ 中的每一个都垂直于波矢量 $\mathbf{k}$，即有两个独立分量。这些矢量的方向决定其相应的行进波的極化方向。用 $Q_{\mathbf{k}j}$，$j=1, 2$，代表矢量 $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ 的两个分量（在与 $\mathbf{k}$ 垂直的平面内），我們就有 $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2=\sum_j Q_{\mathbf{k}j}^2$；对于 $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$，我們也可以得到相似的式子。这时，

$$\mathscr{H}=\sum_{\mathbf{k},j}\mathscr{H}_{\mathbf{k}j},\ \mathscr{H}_{\mathbf{k}j}=\frac{1}{2}(P_{\mathbf{k}j}^2+\omega_k^2Q_{\mathbf{k}j}^2). \tag{6-75}$$

由此可見，哈密頓函数分解为独立項 $\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$ 之和，每一項仅含有一对量 $Q_{\mathbf{k}j}$ 及 $P_{\mathbf{k}j}$。每一个这样的項与一个有一定波矢量及極化的行进波相对应。$\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$ 的形式与作簡諧振动的一度振子①的哈密頓函数一样。因为这个理由，我們有时說用振子来展开場。

我們来写出用变数 $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ 明显表示的場的公式。从(6-71)及(6-72)得

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}=\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}-i\omega_k\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}),\ \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*=-\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}(\mathbf{P}_{\mathbf{k}}+i\omega_k\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}). \tag{6-76}$$

---

① 可以参看，例如，本教程第一卷“力学”§21。

将这些式子代入(6-65),我們得到場的矢势

$$A=2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{k}\frac{1}{k}(ck\mathbf{Q}_{k}\cos\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{P}_{k}\sin\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \qquad (6-77)$$

对于电場与磁場,我們求得

$$\mathbf{E}=2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{k}(ck\mathbf{Q}_{k}\sin\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\mathbf{P}_{k}\cos\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \qquad (6-78)$$

$$\mathbf{H}=2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\sum_{k}\frac{1}{k}\{ck(\mathbf{k}\times\mathbf{Q}_{k})\sin\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+(\mathbf{k}\times\mathbf{P}_{k})\cos\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\}.$$

第七章　光的傳播

§7-1. 几何光学

平面波的特征是它的傳播方向和振幅在任何地点都是一样的。任意的电磁波当然沒有这种特性。

然而，在許多情況下，电磁波虽然不是平面波，但具有这种特性，即它們在空間的每一个小区域內可以当作是平面波。为了滿足这个要求，显然，波的振幅和方向在与波長同数量級的距离內必須是几乎不变的。

假如这个条件被滿足了，我們可以引入一个所謂波面，它是这样一个面，在該面上的每一点，波的相位在任一瞬間都是一样的。平面波的波面显然是一个与光的傳播方向相垂直的平面。在空間的每一个小区域內，我們可以說光的傳播方向垂直于波面。这时，我們可以介紹光綫这个概念，光綫是其上每一点的切綫都同光的傳播方向相合的綫。

这样研究波傳播規律是几何光学的对象。因此，几何光学将波的傳播，特别是光的傳播，当作光綫的傳播，因而完全同它的波的特性脫离了关系。換句話說，几何光学相当于 $\lambda\to 0$ 的極限情形。

我們現在来求几何光学的基本方程——决定光綫方向的方程。設 f 是描写波的場的任意一个量（$\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的任意一个分量）。在平面單色波中，f 有下面的形式：

$$f=ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha)}=ae^{i(k_i x_i+\alpha)} \tag{7-1}$$

（我們略去了 Re；以后所遇到的式子我們到处了解为取其实数部

分)。

我們将場的表示式写成

$$f = ae^{i\psi}. \tag{7-2}$$

假如波不是平面的，但几何光学可以应用，那么，一般来說，振幅 a 是坐标与时間的函数，位数 ψ，也叫做相函数[1]，沒有象(7-1)那样簡單的形式。但是在本質上，ψ 是一个很大的量。这可以直接从下面的事实看出来，即当我們移动一个波長时，ψ 就变动 2π，而几何光学是与極限 $\lambda\to 0$ 相应的。

在一个小的空間区域中和一个小的时間間隔內，相函数可以展开为級数；如果只准确到第一級，則我們有

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

(坐标及时間原点都选擇在所研究的空間区域及时間間隔內；导数的值取在原点的值)。将上式与(7-1)式相比較，得到

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad}\,\psi,\quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{7-3}$$

这相应于下面的事实，即在空間的每一个小区域內(且在每个小时間間隔內)，波可以当作是平面的。用四度空間形式，(7-3)式可以写成

$$k_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}, \tag{7-4}$$

其中 k_i 是四度波矢量。

在§6-3 中我們已經看出，四度矢量 k_i 的分量之間有 $k_i^2 = 0$ 的关系。将(7-4)代入，得到

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \tag{7-5}$$

---

[1] 关于相函数(俄文为 Эйконал，德文为 das Eikonal，英文为 Eikonal)，可参考 A. Sommerfeld: Theoretische physik，第四卷，第一版，第 211—212 頁。——譯者注。

这个方程称为相函数方程，它是几何光学的基本方程。

在波动方程内，作直接的極限过渡 $\lambda\to 0$，也可以导出相函数方程。場 f 滿足波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=0.$$

将 $f=ae^{i\psi}$ 代入，得到

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i^2}e^{i\psi}+2i\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}e^{i\psi}+if\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 f=0. \qquad (7\text{-}6)$$

但是上面已經指出，相函数 ψ 是一个很大的量；因此前三項与第四項相比可以略去，于是我們重又得到方程(7-5)。

在这里，我們还将求出一系列关系，然而若将这些关系应用到光在真空中的傳播上，則所导出的結果都是些显而易見的。同时，我們在这里所求出的普遍形式，对于光在物質媒質中的傳播照样可以应用。

从相函数方程的形式，得到一个在几何光学与質粒力学間的惊人的相似性。粒子运动决定于哈密頓-雅可畢方程(3-50)：

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}-\frac{e}{c}A_i\right)^2+m^2c^2=0.$$

这个方程，正如相函数方程一样，是一个一阶偏导数的、二次的方程。我們知道，作用量 S 与粒子的冲量 $\mathbf{p}$ 及哈密頓函数 $\mathscr{H}$ 有下列关系：

$$\mathbf{p}=\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}},\quad \mathscr{H}=-\frac{\partial S}{\partial t}.$$

将这些公式与公式(7-3)比較，我們看出，波矢量在几何光学中所扮演的角色正如粒子的冲量在力学中所扮演的角色一样，而頻率所扮演的角色是哈密頓函数，即粒子的能量。波矢量的絕对值 k 同頻率有 $k=\frac{\omega}{c}$ 的关系。我們看出，这个关系正与一个質量为零而速度等于光速的粒子的冲量与能量的关系 $p=\frac{\mathscr{E}}{c}$ 相似。

对于質点，哈密頓方程

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{r}},\quad \mathbf{V}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}}$$

成立。从上述的相似性，我們可以直接写出光綫的相似的方程

$$\dot{\mathbf{k}}=-\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}},\quad \dot{\mathbf{r}}=\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}.\tag{7-7}$$

在眞空中，$\omega=ck$，因而 $\dot{\mathbf{k}}=0$，$\mathbf{V}=c\mathbf{n}$（$\mathbf{n}$ 是沿着波的傳播方向的單位矢量）；就是說，在眞空中，光綫是直綫，光沿着这条直綫以速度 c 傳播。

下面的考慮，更加清楚地說明了波的波矢量与粒子的冲量的相似性。我們来考慮一种波，它是許多單色波的迭加，这許多單色波的頻率虽然不同，但是处在某一不大的間隔之內，这个波只占据空間的某个有限区域（这就是所謂“波包”）。我們利用公式(4-43)及能量——冲量張量(6-28)来計算这个波的場的四度冲量（对于每一个單色分量）。用 k_i 的一些平均値代替这个公式中的 k_i，我們得到

$$P_i=Ak_i,\tag{7-8}$$

这里四度矢量 P_i 与 k_i 的比例常数 A 是一标量。写成三度形式，这个关系給出

$$\mathbf{P}=A\mathbf{k},\quad \mathscr{E}=A\omega.\tag{7-9}$$

由此可見，当我們从一个参考系統过渡到另一个参考系統时，波包的冲量与能量波矢量与頻率一样变換。

再往前追溯这种相似处，我們可以为几何光学树立一个原理，这个原理与在力学中的最小作用量原理相似。然而，最小作用量原理这时不能写成哈密頓形式 $\delta\int Ldt=0$，因为对于光綫，不可能引用一个如粒子的拉格朗日函数一样的函数。事实上，粒子的拉格朗日函数与哈密頓函数有 $L=\mathbf{p}\cdot\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}}-\mathscr{H}$ 的关系。假如用頻率 ω 代替哈密頓函数，用冲量代替波矢量 $\mathbf{k}$，那么，光学中的拉格朗

日函数就应該写成 $\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}-\omega$。但是这个式子等于零，因为 $\omega=ck$。既然前面已經提到过，光綫的傳播，同一个質量为零的粒子的运动相似，那么，对于光綫引用拉格朗日函数之不可能也就直接看出来了。

假如波有一个一定的恒定頻率 ω，那么，它的場与时間的关系就为一个因子 $e^{-i\omega t}$ 所决定。因此，这样的波的相函数就是

$$\psi=-\omega t+\psi_1(x, y, z), \qquad (7\text{-}10)$$

式中，ψ_1 仅是坐标的函数。相函数方程(7-5)現在取下面的形式：

$$(\text{grad}\ \psi_1)^2=\frac{\omega^2}{c^2}. \qquad (7\text{-}11)$$

波面就是定値相函数的曲面，亦即曲面族 $\psi_1(x, y, z)=$常数。光綫本身在每一点都垂直于相应的波面；光綫的方向为梯度 $\nabla\psi_1$ 所决定。

众所周知，假如能量是常数，粒子的最小作用量原理也可以写成一种所謂莫培督原理①的形式：

$$\delta S=\delta\int\mathbf{p}\cdot d\mathbf{l}=0,$$

这里的积分是沿着两点間的粒子的軌道而取的。在这个式子內，我們假設冲量是能量与坐标微分的函数。光綫的相类似的原理是**費馬原理**。在这种情形下，我們利用相似性，将費馬原理写成

$$\delta\psi=\delta\int\mathbf{k}\cdot d\mathbf{l}=0. \qquad (7\text{-}12)$$

在真空中，$\mathbf{k}=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}$，我們得到($d\mathbf{l}\cdot\mathbf{n}=dl$)

$$\delta\int dl=0, \qquad (7\text{-}13)$$

这与光沿直綫傳播相应。

---

① 关于莫培督原理，可参考周培源：理論力学，第460頁——譯者注。

§ 7-2. 强度

在几何光学中，光波可以当作一束光綫。然而光綫本身仅仅决定光在每一点的傳播方向，还余下来一个問題，即光的强度在空間分布的問題。

在所考虑的光綫束的波面上，我們取出一个无限小的面元。从微分几何知道，在每一个曲面的每一点上，有两个(一般説是不同的)主曲率半徑。設 ac 和 bd(圖 7-1)为主曲率圓的綫元，它們是在波面的給定面元上。經过 a 和 c 的光綫相交于相应的曲率圓心 O_1，而經过 b 和 d 的光綫則相交于另一曲率圓心 O_2。

当从 O_1 和 O_2 出發的光束的开放角一定时，弧 ac 和 bd 之長显然与曲率半徑 R_1 和 R_2 成比例(即与 O_1a 及 O_2b 成比例)。面元的面积与長度 ac 和 bd 之积成比例，即与 R_1R_2 成比例。換句話説，假如我們考虑一个由一組光綫所限制的波面元，那么，当我們沿着光綫移动时，面元的面积将与 R_1R_2 成比例地改变。

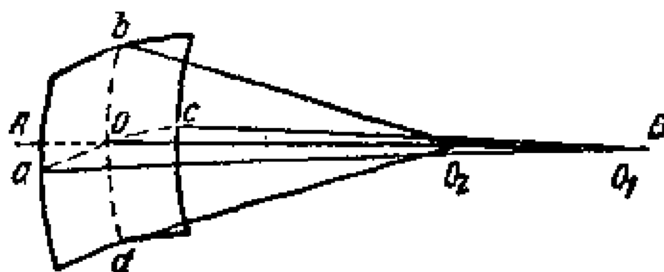


圖 7-1.

另一方面，光的强度，即每單位面积的能量通量，与一定的光能量通过的曲面面积成反比。因此，我們得到一个結果，即光的强度是

$$I=\frac{常数}{R_1R_2}. \tag{7-14}$$

这个公式必須了解如下。在每一条光綫上(圖 7-1 中的 AB)，存在着确定的点 O_1 及 O_2，这两点是所有与光綫相交的波面的曲率中心(在与其他光綫相交之点上)。OO_1 与 OO_2 是从 O 点(波面与

光綫相交之点)到 O_1 和 O_2 的距离，即波面在 O 点的曲率半徑 R_1 及 R_2。因此，公式(7-14)决定光沿着一条光綫上的强度变化，表示为到該綫上二定点之距离的函数。我們强調指出，这个公式不能用来比較同一波面上的不同点的强度。

既然强度为場的模的平方所决定，我們就可以写出場本身沿光綫的变化如下：

$$f=\frac{常数}{\sqrt{R_1R_2}}e^{ikR}, \tag{7-15}$$

此式中，在相因子 e^{ikR} 內，我們可以用 R_1 代替 R 也可以用 R_2 代替 R。对于一給定的光綫，e^{ikR_1} 和 e^{ikR_2} 两个量只相差一个常量因子，因为差 R_1-R_2 即两个曲率中心的距离，是一个常数。

假如波面的两个曲率半徑相等，那么，(7-14)和(7-15)就有如下的形式：

$$I=\frac{常数}{R^2}, \quad f=\frac{常数}{R}e^{ikR}. \tag{7-16}$$

当光是从一个点源射出时，这种現象总会發生的(波面都是同心球，R 是从光源到波面的距离)。

从(7-14)式，我們看出，在 $R_1=0$, $R_2=0$ 各点，即在波面的曲率中心，强度变为无穷大。将这个結論应用到光綫束，我們得到在一給定光綫束內，光的强度，一般来說，在两个曲面上变为无穷大，这两个曲面就是波面的曲率中心的軌迹。这两个曲面称为焦散面。在特殊情形下，即光束的波面是球面，那么，两个焦散面就融合为一点(焦点)。

必須指出，按照微分几何中大家所知道的曲面族的曲率中心軌迹的性質，光綫与焦散面相切。

我們应当記着，对于凸波面，波面的曲率中心可以不在光綫本身上，而在光綫的延長綫上，在發出光綫的光学系統之外。在这种情形下，我們說它是虛焦散面(或虛焦点)。这时，光的强度无論在

那里都不会变为无限大。

至于光的强度变为无限大，不用說，在实际上，强度在焦散面上虽变大了，但仍是有限的(見§7-7中的習題)。形式上，光强变为无限大就說明几何光学的近似性不能应用到焦散面附近。同这个有关系的还有下述的事实，即位相沿着光綫的变化可以由公式(7-15)来决定，但是只限于不包含与焦散面相切之点的一段。以后在§7-7中我們还要証明，实际上当光綫穿过焦散面时，場的位相减少$\frac{\pi}{2}$。这就是說，假如在光綫上与焦散面第一次相交之前的那一段上，場与因子e^{ikx}(x是沿光綫的坐标)成比例，那么，穿过焦散面以后，場将与$e^{i\left(kx-\frac{\pi}{2}\right)}$成比例。在第二个焦散面的切点的附近，同样的情形又發生了，在这点以后，場将与$e^{i(kx-\pi)}$成比例。

§7-3. 角相函数

假如一条光綫在真空中行进，投射在一个透明物体上，当它从这个物体射出时，它的方向与原来的方向一般来說是不同的。这种方向的改变当然与物体的特性和物体的形状有关。但是，我們可以求得一些一般的規律，这些規律給出光綫經过一个任意物体时方向的改变。在此，我們只假定几何光学可以应用到在我們所考虑的物体內行进的光綫。依照慣例，光綫所穿过的透明物体称为“光学系統”。

按照§7-1所指出的光綫傳播与粒子运动的相似性，这些普遍定律，对这样的粒子的运动的方向改变也是有效的，这个粒子在真空中最初沿直綫运动，以后經过任一电磁場，再从这个場中穿出来到真空中。但是，为了确定起見，我們以后总是說光綫的傳播。

我們在上节已經看出，决定光綫傳播的相函数方程可以写成(7-11)的形式：$(\nabla\psi_1)^2=\frac{\omega^2}{c^2}$（对于有一定频率的光綫）。从現在起，为便利起見，我們用 ψ 代表被常数 $\frac{\omega}{c}$ 除过了的相函数。这时，几何光学的基本方程有下列形式：

$$(\nabla\psi)^2=1. \tag{7-17}$$

这个方程的每一个解描写一个一定的光綫束，而且經过空間給定点的光綫的方向为該点的 ψ 的梯度所决定。然而为了我們的目的，这种描写是不够的，因为我們正在寻找普遍关系，用这些普遍关系来决定任意光綫經过一个光学系統的路徑，而不是一个一定的光綫束經过一个光学系統的路徑。因此，我們必須应用相函数的这样一个形式，它可以描写所有一般可能的光綫，就是經过空間任意一对点的光綫。通常形式的相函数 $\psi(\mathbf{r})$ 是經过点 $\mathbf{r}$ 的某束之光綫的相。現在我們应当介紹相函数为两点的坐标的函数 $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$（$\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 是光綫的初点和終点的矢徑）。一条光綫可以經过每一对点 $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$，而 $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 是这条光綫上的两点 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 的相差（或如一般所称的，光程長度）。从現在起，我們了解 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 为光綫未透过光学系統和已透过光学系統的两点的矢徑。

假如在 $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 中，認为矢徑之一，例如 $\mathbf{r}'$，是給定的，那么，ψ 是 $\mathbf{r}$ 的函数，描写一个一定的光綫束，即經过 $\mathbf{r}'$ 点的光綫束。ψ 应当滿足方程(7-17)，方程中的微分是对 $\mathbf{r}$ 的分量进行的。同理，假如 $\mathbf{r}$ 固定，我們又得到一个 $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 的方程，因此

$$(\nabla_{\mathbf{r}}\psi)^2=1,\ (\nabla_{\mathbf{r}'}\psi)^2=1. \tag{7-18}$$

从上节我們知道，光綫的方向为它的相的梯度所决定。既然 $\psi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ 是在点 $\mathbf{r}$ 及点 $\mathbf{r}'$ 的位相差，在 $\mathbf{r}'$ 点的光綫的方向就为矢量 $\mathbf{n}'=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}$ 所决定，而在 $\mathbf{r}$ 点的光綫的方向，則为矢量 $\mathbf{n}=-\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}$ 所决定。从(7-18)式可以看出，$\mathbf{n}$ 及 $\mathbf{n}'$ 是單位矢量：

$$\mathbf{n}^2=\mathbf{n}'^2=1. \tag{7-19}$$

四个矢量 $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{n}, \mathbf{n}'$ 相互間有一定的关系，因为 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 是某一函数 ψ 对 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 的导数。至于函数 ψ 本身，那它是满足补充条件——方程(7-18)的。

为了求出 $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}, \mathbf{r}'$ 的关系，最便利的方法是用另外一个量代替 ψ，在这个量之上不加任何附带条件(即这个量不应当满足任何微分方程)。我們可以按照下面的方法去作。在函数 ψ 内，独立变数是 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$，因此，对于微分 $d\psi$，我們有

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r}+\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}\cdot d\mathbf{r}'=-\mathbf{n}\cdot d\mathbf{r}+\mathbf{n}'\cdot d\mathbf{r}'.$$

現在我們作一个勒襄特变换，从 $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ 变換到新的独立变数 $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$；亦即我們写

$$d\psi=-d(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+\mathbf{r}\cdot d\mathbf{n}+d(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}')-\mathbf{r}'\cdot d\mathbf{n}',$$

引入函数

$$\chi=\mathbf{n}'\cdot\mathbf{r}'-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\psi \tag{7-20}$$

我們可得到

$$d\chi=-\mathbf{r}\cdot d\mathbf{n}+\mathbf{r}'\cdot d\mathbf{n}'. \tag{7-21}$$

函数 χ 称为“角相函数”；从(7-21)式，可以看出，角相函数内的独立变数是 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$。沒有附带条件加在 χ 上。事实上，方程(7-19)現在仅仅表示 $\mathbf{n}^2=\mathbf{n}'^2=1$，而这是关于独立变数的条件。从这些条件可以看出，在矢量 $\mathbf{n}$ 的三个分量 n_x, n_y, n_z 中，只有两个是独立的，对于 $\mathbf{n}'$ 也有类似情况。我們以后选取 n_y, n_z, n_y', n_z' 为独立变数，这时，$n_x=\sqrt{1-n_y^2-n_z^2}$，$n_x'=\sqrt{1-n_y'^2-n_z'^2}$。

将这些式子代入

$$d\chi=-x\,dn_x-y\,dn_y-z\,dn_z+x'dn_x'+y'dn_y'+z'dn_z',$$

我們得到微分 $d\chi$ 的表示式

$$d\chi=-\left(y-\frac{n_y}{n_x}x\right)dn_y-\left(z-\frac{n_z}{n_x}x\right)dn_z+$$
$$+\left(y'-\frac{n_y'}{n_x'}x'\right)dn_y'+\left(z'-\frac{n_z'}{n_x'}x'\right)dn_z'.$$

由此，我們便最后求得下面的方程:

$$
\begin{aligned}
&y-\frac{n_y}{n_x}x=-\frac{\partial\chi}{\partial n_y}, \quad z-\frac{n_z}{n_x}x=-\frac{\partial\chi}{\partial n_z},\\
&y'-\frac{n_y'}{n_x'}x'=-\frac{\partial\chi}{\partial n_y'}, \quad z'-\frac{n_z'}{n_x'}x'=\frac{\partial\chi}{\partial n_z'},
\end{aligned}
\tag{7-22}
$$

这就是我們所求的 $\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{r}, \mathbf{r}'$ 間的一般关系。函数 χ 是光綫所經过的物体的特性(假如物体是一个运动的带电粒子，χ 就是場的特性)。

当 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 之值固定时，(7-22)中每一对方程都代表直綫。这些直綫正是未穿过光学系統的光綫与穿过光学系統后的光綫。因此，方程(7-22)直接决定光学系統两側的光綫进程。

§7-4. 狹光綫束

在研究光綫束經过光学系統时，所有光綫都相交于一点的光綫束是值得特别注意的(这样的光綫束称为同心的)。

經过光学系統后，同心光綫束一般不再是同心的了，亦卽經过物体后，光綫不再会聚在一点了。仅仅在特殊情况下，光才是从一个發光点出發，穿过一个光学系統后，又会聚在一点(發光点的象)[1]。

可以証明(見§7-5)，整个同心光綫束經过光学系統后仍然保持为同心光綫束的唯一情形是所謂恒等反射的情形，在恒等反射的情形下，光学系統对于任何物件都給出与物件大小式样完全相同的象(換句話說，象与物件的差別仅在于移动，轉动或完全鏡反射)。

因此，沒有光学系統能給予物件(具有一定的大小)以完全清晰的象，只有恒等反射的情形是例外[2]。

---

① 交点可以在光綫本身上，也可以在它們的延長綫上；象称为实象或虛象卽依此情况而定。

② 这种反射可以借助于平面鏡实現。

凡是不是恒等反射的情形，一个有一定大小的物体只能产生近似清晰的象，而不能产生完全清晰的象。

一个同心光綫束过渡到另一个同心光綫束的最重要的情况，是在一条固定的（对該光学系統而言）綫附近行进的十分狹的(开放角甚小)光綫束。这条綫称为光学系統的光軸。

然而我們必須注意，甚至无限狹的光綫束(在三度空間內)在一般情况下也不是同心的；我們已經看出，甚至在这样的光束內，不同的光綫相交在不同的点(这种現象称为象散現象)。只有波面的这些点是例外，在这些点上两个主曲率半徑相等，即这些点的附近的波面上的一个小区域可以当作是球面，其相应的狹光綫束是同心的。

我們考虑一个具有軸对称的光学系統。这个系統的对称軸同时也是它的光軸。沿着这个軸行进的光綫束的波面也有軸对称性；正如我們所知道的，旋轉面在它們与对称軸相交的那些点有相等的曲率半徑。因此在这个方向行进的狹光綫束保持为同心的。上面的結論也可以应于用行进方向同光軸夹角十分小而本身又十分狹的光綫束①。

为了得到定量的关系，并利用狹的光綫束来决定經过一个軸对称光学系統的象的形成，我們利用普遍公式(7-22)，当然首先要确定函数 χ 在所研究的情形中应取的形式。

既然光綫束是狹的，而且在光軸的近旁行进，那么，每个束的矢量 $\mathbf{n}$ 及 $\mathbf{n}'$ 差不多都是沿着这个軸的方向。假如我們选擇光軸作为 X-軸，那么，分量 n_y, n_z, n_y', n_z' 就比一小了。对于 n_x, n_x' 而言，$n_x \approx 1$，而 n_x' 則近似地等于 $+1$ 或 -1。在第一种情形下，光綫几乎沿着原来方向繼續行进，穿过光学系統而进入其另一边的

① 我們可以証明，借助于在光軸近旁行进的狹光綫束在一个非軸对称光学系統內成象的問題可以化为在軸对称系統內成象，加上如此所得的象相对于物体的旋轉。

空間內。这种光学系統称为透鏡。在第二种情形，光綫改变方向到几乎相反的方向上；这种光学系統称为反射鏡。

利用 n_y, n_z, n_y', n_z' 的値很小的性質，将角相函数 $\chi(n_y, n_z, n_y', n_z')$ 展开为級数到前几項为止。由于整个系統的軸对称性，χ 对于坐标系統繞光軸的旋轉来說是不变量。由此可見在 χ 的展开式中不可能有与矢量 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}'$ 的 y 分量和 z 分量的一次幂成比例的一阶項，因为这样的項就不可能有所要求的不变性。具有所要求的特性的二阶項是 $\mathbf{n}^2, \mathbf{n}'^2$ 和无向积 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'$。因此，精确到二阶項为止的軸对称光学系統的角相函数有下面的形式:

$$\chi = \text{常数} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n_y' + n_z n_z') + \frac{h}{2}(n_y'^2 + n_z'^2), \tag{7-23}$$

式中，f、g、h 是常数。

为了确定起見，我們現在来研究一个透鏡，这时我們使 $n_x' \approx 1$；对于反射鏡，以后可以知道，所有的公式都有相似的形状。現在将(7-23)代入普遍公式(7-22)內，我們得到:

$$\begin{aligned} n_y(x-g) - fn_y' &= y, \quad fn_y + n_y'(x'+h) = y', \\ n_z(x-g) - fn_z' &= z, \quad fn_z + n_z'(x'+h) = z'. \end{aligned} \tag{7-24}$$

我們考慮一个从点 x, y, z 射出来的同心光束；設点 x', y', z' 是光束的光綫透过透鏡后的交点。假如(7-24)的第一对方程与第二对方程都是独立的，那么，这四个方程当 x, y, z, x', y', z' 为已知时决定 n_y, n_z, n'_y, n'_z 的一組确定的値，就是說，只有一条光綫从点 x, y, z 出發并經过点 x', y', z'。因此，为了使所有从 x, y, z 出發的光綫都經过 x', y', z'，(7-24)就必須不是独立的，就是說，这些方程中的一对是可以从另一对推出来的。这种相依性的必要条件显然是这些方程中的一对方程的系数与另一对方程的系数成比例(这时，将常数乘一对方程就得出另一对方程)。因此我們有

$$\frac{x-g}{f}=-\frac{f}{x'+h}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'};\tag{7-25}$$

由此可得

$$(x-g)(x'+h)=-f^2.\tag{7-26}$$

我們所求得的这些方程就是象坐标与物坐标在利用狹光束成象时必須滿足的关系。

在光軸上的两点 $x=g$ 及 $x=-h$ 称为光学系統的主焦点。我們来考慮平行于光軸的光綫束。这种光的源点显然是在光軸上的无穷远点，即 $x=\infty$。从(7-25)式看出，在这种情况下，$x'=-h$。因此，一个平行光綫束，經过光学系統后，相交于主焦点。反之，一束光綫，从主焦点射出，經过光学系統后就变为平行光了。

在方程(7-25)中，坐标 x 和 x' 都是从光軸上同一原点量起的。然而，假如选擇相应的主焦点作为原点，并从这些不同的原点去量物坐标及象坐标，就将还要便利些。我們选擇从主焦点(与光綫相应的)到光行进的一边的方向为正方向。用大写字母代表新的物坐标及象坐标，則我們有

$$X=x-g,\ X'=x'+h,\ Y=y,\ Y'=y',\ Z=z,\ Z'=z'.$$

成象的方程(7-25)及(7-26)在新坐标中取下面的形式:

$$XX'=-f^2;\tag{7-27}$$

$$\frac{Y'}{Y}=\frac{Z'}{Z}=\frac{f}{X}=-\frac{X'}{f}.\tag{7-28}$$

f 这个量称为这个系統的主焦距。

Y'/Y 这个比值称为横向放大率。至于縱向放大率，旣然坐标并不彼此成簡單比例，它就必須写成微分形式，用来比較物元素的長(沿軸的方向)与相应的象元素的長。从(7-27)式，我們得到"縱向放大率"为

$$\left|\frac{dX'}{dX}\right|=\frac{f^2}{X^2}=\left(\frac{Y'}{Y}\right)^2.\tag{7-29}$$

由此可見，就是对于无限小的物体来說，也不可能得到一个几

何相似的象。縱向放大率絕对不会等于横向放大率(除了恒等反射一种情形外)。

从光軸上的 $X=f$ 的点出發的光綫束，又交于同一軸上的 $X'=-f$ 的点；这两个点称为主点。从方程(7-24)($n_yX-fn_y'=Y$, $n_zX-fn_z'=Z$)显而易見，在这种情形($X=f, Y=Z=0$)下，我們得到方程 $n_y=n_y'$, $n_z=n_z'$。因此，每条从主点出發的光綫，又在另一主点与光軸相交，其方向与原方向平行。

假如物和它的象的坐标是从主点量起，而不是从主焦点量起，那么，对于这些坐标 ξ 和 ξ'，我們有

$$\xi'=X'+f,\quad \xi=X-f.$$

将上式代入(7-27)，我們就很容易得到成象方程如下：

$$\frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi'}=-\frac{1}{f}. \tag{7-30}$$

我們可以証明，对于薄的光学系統(例如反射鏡或薄透鏡)，两个主点差不多重合。在这种情形下，方程(7-30)就特别方便，因为在这个方程中，ξ 和 ξ' 实际上从同一点量起。

假如焦距为正，那么，位于焦点前面(按光綫的行进)的物($X>0$)所生成的象是正立的($Y'/Y>0$)；这种光学系統称为会聚的。假如 $f<0$，那么，当 $X>0$ 时，我們得到 $Y'/Y<0$，就是說，物所生成的象是倒立的；这种光学系統称为發散的。

还有一个构象的極限情形沒有被包含在公式(7-30)内；在这种情形下，(7-23)的所有系数 f, g, h 都是无穷大(就是說，光学系統有无限大的焦距，而其主焦点位于无限远处)。将(7-26)式中的括弧乘积展开，逐項用 g 来除，再使 f, g, h 趋近于无限大取極限，我們得到

$$x'=\frac{h}{g}x+\frac{f^2-gh}{g}.$$

既然我們只注意物和它的象与光学系統之間的距离为有限的情

形，f, g, h 必須这样地趋近于无限大，使比值 $h/g, f^2-gh/g$ 为有限。用 α 和 β 分别代表这两个比值，则我們有

$$x'=\alpha x+\beta.$$

对于其他两个坐标，我們現在从普遍方程(7-29)得到 $y'/y=z'/z=\sqrt{\alpha}$。最后，又从不同的原点量坐标 x 和 x'，即从軸上的某一任意点及这个点的象量坐标 x 和 x'，我們最后得到成象方程的簡單形式如下：

$$X'=\alpha X,\quad Y'=\pm\sqrt{\alpha}\,Y,\quad Z'=\pm\sqrt{\alpha}\,Z. \tag{7-31}$$

因此，縱向放大率和横向放大率都是常数(然而象在几何上并不与物相似，因为两个放大率不相等)。这种成象的情形称为望远鏡式的。

我們为透鏡求出的，从(7-27)到(7-31)的所有方程，对于反射鏡同样可以应用，甚至于对沒有軸对称的光学系統也可以应用，只要求用来构象的狭光綫束是在光軸的附近行进就够了。同时，物和象的坐标 x 的度量必須总是从相应的点(主焦点及主点)順着光綫傳播方向沿光軸进行。这时，必須記住，在沒有軸对称的光学系統中，在光学系統前面与在光学系統后面的光軸不在同一直綫上。

習　題

利用两个光軸合而为一軸对称光学系統构象，試求其焦距。

解　設 f_1 和 f_2 是这两个系統的焦距。对每一單个的系統，我們有

$$X_1X_1'=-f_1^2,\quad X_2X_2'=-f_2^2.$$

既然第一个系統所产生的象作为第二个系統的物，那么，用 l 来代表第一个系統后面的主焦点与第二个系統前面的焦点的距离，我們就有 $X_2=X_1'-l$；通过 X_1 来表示 X_2'，得到

$$X_2'=\frac{X_1f_2^2}{f_1^2+lX_1}$$

或

$$\left(X_1+\frac{f_1^2}{l}\right)\left(X_2'-\frac{f_2^2}{l}\right)=-\left(\frac{f_1f_2}{l}\right)^2,$$

由此可見，組合系統的主焦点位于点 $X_1=-f_1^2/l, X_2'=f_2^2/l$ 而主焦距則是

$$f=-\frac{f_1f_2}{l}$$

（为了选擇这个式子的符号，我們必須写出相应的横向放大率的方程）。

当 $l=0$，焦距 $f=\infty$，就是說，由組合系統得到望远鏡式的构象。在这种情形下，我們有 $X_2'=X_1(f_2/f_1)^2$，就是說，在普遍公式(7-31)中的參数 α 等于：

$$\alpha=\frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

§7-5. 用寬光綫束来构象

我們在上节所考慮的用狹光綫束来构象的情形是近似的；光束愈狹，象愈准确(即象愈清晰)。我們現在提出这个問題，即利用一个任意寬的光綫束給物体准确地构象有多大的可能性。

同利用狹光綫束来构象的情形不同；用狹光綫束构象对于任何具有軸对称的光学系統都可能办到，但利用寬光綫束来构象仅仅对于特別构造的光学系統才有可能。在§7-4中已經指出过，即使加上了这个限制，构象也不是在空間所有的点都可能。

以后的推导是根据下面的說明。設所有从某一点 O 出發的光綫，穿过光学系統后，又在另外一点 O' 相交。很容易看出，所有光綫的光程長度 ψ 都是一样的。实际上，在 O 与 O' 二点中的每一点的近旁，相交在它們上的光綫的波面是分別以 O 及 O' 为心的球面，在趋近于 O 和 O' 的極限情形下，波面退化为这两个点。但是波面是等位相面，因此，沿着不同的光綫，在它們与两个已定波面的交点之間的位相变化是一样的。从上面所說的，可以推断，不同的光綫在 O 和 O' 两点間的总的位相变化也是一样的。

首先讓我們来考慮利用寬光綫束使一小段直綫生成象所必須滿足的条件；这时，象也是一小段直綫。我們选擇这两个綫段的方向为 X 和 X' 軸的方向，其原点是在物与象的任何两个相应点 O 和 O' 上。設 ψ 为从 O 出發到达 O' 的光綫的光程長度。假如一条光

綫从与 O 点无限近的一点(其坐标为 dx)出發，到达象所在的一点(其坐标为 dx')，这条光綫的光程長度将是 $\psi+d\psi$，其中，

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial x'}dx'.$$

我們引入成象的"放大率"

$$\alpha=\frac{dx'}{dx},$$

它是象元素的長 dx' 与物元素的長 dx 之比。因为物的綫段很短，放大率 α 沿着綫段可以当作是常数。按照平常的写法，$\partial\psi/\partial x=-n_x$，$\partial\psi/\partial x'=n'_x$($n_x$, n'_x 是光綫与相应的 X 軸和 X' 軸所夹之角的余弦)，我們得到

$$d\psi=(\alpha n'_x-n_x)dx.$$

对于每一对物与象的相应点，光程長度 $\psi+d\psi$ 对于所有从点 dx 出發而到达点 dx' 的光綫都是一样的。从此我們得到一个条件：

$$\alpha n'_x-n_x=\text{常数}. \tag{7-32}$$

这就是我們所求的条件，它是在利用寬光綫束使一段直綫生成象时，光綫在光学系統内的路程所必須滿足的条件。所有从 O 点出發的光綫都必須滿足(7-32)式。

举例而言，讓我們应用条件(7-32)到下面的构象情形，即利用軸对称光学系統对与系統的光軸重合的綫段构象。显而易見，象也与光軸重合。由于光学系統的軸对称性，一条沿光軸行进的($n_x=1$)光綫通过光学系統后并不改变它的方向，就是說，$n'_x=1$。由此可以断定，(7-32)式中的常数在这种情况下等于 $\alpha-1$；我們可以将(7-32)式改写为

$$\frac{1-n_x}{1-n'_x}=\alpha.$$

用 θ 和 θ' 代表光綫在物与象的所在点与光軸所夹之角，則我們有

$$1-n_x=1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2},\quad 1-n'_x=1-\cos\theta'=2\sin^2\frac{\theta'}{2}.$$

因此，我們得到构象的条件如下：

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta'}{2}}=\text{常数}=1/\sqrt{\alpha}. \tag{7-33}$$

現在我們来討論对一个平面的一个小部分的构象，这个象将是另一平面的一个小部分。很容易証明，假如对于在物的平面內任意两个綫段，(7-32)这个条件是被滿足了，那么，对于在这个平面內的任意其他綫段这个条件也是被滿足的，因此，对于所考慮的平面的整个区域，我們都能构象。我們总能在物的平面內选擇 X 与 Y 軸，使象軸 X' 和 Y' 互相垂直。在利用寬光綫束来对平面的一小部分的构象时，加于光学系統內的光程上的条件可以写成下面的形式：

$$\alpha n'_x-n_x=\text{常数}, \quad \beta n'_y-n_y=\text{常数}. \tag{7-34}$$

式中，α 和 β 是确定在 X 方向和在 Y 方向的放大率的常数。

作为例子，我們来研究垂直于軸对称光学系統光軸的一小塊平面的成象。这个象显然也垂直于这个軸。由于对称性的原故，$\alpha=\beta$，因此(7-34)两个条件在此处化为一个。再用 θ 和 θ' 代表光綫与光軸在物与象的所在点的夹角，我們得到

$$\alpha\sin\theta'-\sin\theta=\text{常数}.$$

对于从物平面与光軸的交点出發而又沿着这个光軸行进的光綫($\theta=0$)，根据对称性，我們必定有 $\theta'=0$。因此，常数$=0$，于是我們得到构象条件为

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\text{常数}=\alpha. \tag{7-35}$$

关于利用寬光綫束来构三度物体的象，很容易看出，即使对于一个无限小的体积，这也是不可能的。事实上，这样构象的条件是在物的体积內的任意三个綫段必須滿足(7-32)式。这些关系必須

对于所有从物的一点 O 發出的光綫都能被滿足，卻在矢量 $\mathbf{n}$ 任意的情形下都能被滿足。因此，單位矢量的分量 n'_x, n'_y, n'_z 必須滿足如(7-32)形式的三个方程，此外还要滿足 $n'^2_x+n'^2_y+n'^2_z=1$，就是說一共要滿足四个方程，这在一般情形下是不可能的(除了恒等构象的情形外)。

§ 7-6. 几何光学的極限

直接从單色平面波的定义可以知道，在这样的波中，振幅无論在任何地点和在任何时候都是一样的。这样的波在空間的任何方向都是沒有限制的，而且在从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整个时間范圍內都是存在的。任何波的振幅如在任何地点和在所有时間都不是常量，那么，这种波只能是或多或少單色的。我們現在来討論一个波的“單色程度”的問題。

讓我們来考虑一个振幅为时間函数的电磁波。換句話說，在波經过的空間每一点，波的振幅隨着时間变化。

設 ω_0 是波的某一平均頻率。这时，波的場，例如电場，在一指定点有 $\mathbf{E}_0(t)e^{i\omega_0 t}$ 的形式。这个場本身当然不是單色的，然而可以展开为單色波，即可以展开为傅里叶积分。这个展开式中的分量的振幅与积分 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}_0(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt$ 成比例，ω 是展开式的分量的頻率。因子 $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ 是一个周期性函数，其平均值为零。假如 $\mathbf{E}_0$ 是常数，那么，对于所有 $\omega\neq\omega_0$ 的角頻率，积分就真正等于零了。假如 $\mathbf{E}_0(t)$ 是变数，但是在一个大小与 $1/(\omega-\omega_0)$ 同阶数量級的时間間隔內变化很小，那么，这个积分就几乎等于零，$\mathbf{E}_0$ 的变化愈慢，积分就愈近于零。为了使积分与零有显著的不同，$\mathbf{E}_0$ 在一个与 $1/(\omega-\omega_0)$ 同数量級的时間間隔內必須有显著的变化。

我們用 Δt 表示这样一个时間間隔的数量級，在这个时間間隔內，波的振幅在空間一給定点的变化是显著的。从这些考慮，現在可以推断，那些在这个波的光譜分解中有显著强度的、与 ω_0 相差最大的頻率将为 $1/(\omega-\omega_0)\sim\Delta t$ 这个条件所决定。假如用 $\Delta\omega$ 表示平均頻率 ω_0 附近的頻率間隔，而这个頻率間隔是在波的光譜分解之內，那么，我們将有关系式

$$\Delta\omega\Delta t\sim 1. \tag{7-36}$$

$\Delta\omega$ 愈小，那个波的光譜分解中的頻率間隔也就愈小，就是說，波愈加近于單色的。因此可以看出，实际上波愈是近于單色的，Δt 就愈大，就是說波在空間每一点的振幅变化也就愈慢。

与(7-36)相似的关系，对于波矢量也容易导出来。設 Δx, Δy, Δz 是沿着 X, Y, Z 各軸的距离的数量級，在这些距离內，波的振幅有显著的变化。在給定瞬間，波的場作为坐标 x 的函数(y 和 z 固定)有 $\mathbf{E}_0(x)e^{ik_{0x}x}$ 的形式，此处的 k_{0x} 是波矢量的 x 分量的某一平均值。与推导(7-36)式完全一样，我們可以求得波的傅里叶积分展开式中所含的值的間隔 Δk_x(同样对于 k_y, k_z)。这时，我們得到

$$\Delta k_x\Delta x\sim 1,\quad \Delta k_y\Delta y\sim 1,\quad \Delta k_z\Delta z\sim 1. \tag{7-37}$$

讓我們来研究在有限时間間隔內輻射出去的波这个特例。用 Δt 代表这个时間間隔的数量級。波在空間給定点的振幅在 Δt 內在任何情况下都有显著的变化，而在这个时間間隔 Δt 內，波已完全通过这一点。根据(7-36)式，我們現在可以說这样的波的“單色程度”$\Delta\omega$ 不能小于 $1/\Delta t$(然而，大一些当然是可以的)：

$$\Delta\omega\gtrsim\frac{1}{\Delta t}. \tag{7-38}$$

同样，假如 Δx, Δy, Δz 是波在空間的延展的数量級，那么，对于在波的分解中的波矢量的分量之值的間隔，我們得到

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \qquad (7\text{-}39)$$

从这些公式可以断定．假如光束有一个一定的寬度，那么，在这样的一个光束中，光的傳播方向不可能严格不变。取光束中光的(平均)方向作为X軸的方向，我們得到

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \qquad (7\text{-}40)$$

式中，θ_y是光束在XY平面内对其平均方向的偏差的数量級(見§7-9)。

另一方面，公式(7-40)解决了光的构象的清晰的極限問題，一个光束的所有光綫按照几何光学应該都相交在一点，而在实际上，所得的象并不是一个几何点而有斑点的形状。按照(7-40)式，斑点的寬度

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \qquad (7\text{-}41)$$

其中，θ是光束的开放角。这些公式不但可以应用到象上，而且也可以应用到物上。就是說，我們可以肯定，在观察一个从一个發光点射出的光束时，不可能区别这个点与一个大小为λ/θ的物体。相应地，这个公式(7-41)决定显微鏡的鑒别能力的極限。当$\theta \sim 1$时，Δ达到最小值，这个值是λ，这是与这个事实完全符合，即几何光学的極限是为光波的波長所决定的。

習　題

求一个与幕相距为l的平行光束所产生的光束的最小寬度的数量級。

解　設在幕上的孔徑为d，从(7-40)得到衍射角为λ/d，从而得到光束寬度的数量級为$d+\frac{\lambda}{d}l$。这个量的最小值是$2\sqrt{\lambda l}$。

§7-7. 衍射

几何光学定律只有在波長可以算作无限小的理想情况下才是

严格正确的。这个条件愈是不能正确地被满足，与几何光学的偏差就愈大。这种差异的結果就产生所謂"衍射現象"。

例如，在光[1]傳播的道路上，放置一个障碍物——一个任意形状的不透明物体，(我們称它为屏)或者，例如，光經过不透明屏的孔，这时，我們就能观察到衍射現象。假如几何光学定律被严格地滿足的話，那么，在屏后面将有一些影区，影区与光落于其上的区域有非常清楚的分界綫。由于衍射，光与影之間，沒有明晰的界限，而光强分布圖形甚为复杂。屏愈小，或屏上的光孔愈小，或波長愈大，这种衍射現象就愈强。

衍射理論的任务就是，在物体位置与形状一定(光源位置也一定)的情况下，求光的傳播，即求整个空間的电磁場。这个問題的准确解只有在滿足物体表面上的适当的边界条件下求解波动方程才可能得到，而这些边界条件則与物質的光学性質有关。这样的求解往往遇到很大的数学困难。

然而，在大多数情况下，对于光在光与影的边界附近的分布問題，利用求解的近似方法就够了。我們可以将这种方法用于与几何光学相差不大的情形，这种情形是：第一，所有物体的大小都比波長大很多；第二，光的方向与几何光学所給出的光綫方向相差很小。



圖 7-2.

現在我們来考虑任意一个有孔的屏，光綫从光源出發穿过这个孔。圖 7-2 表示屏的断面(粗綫)；光行进的方向是从左向右。用 u 代表 $\mathbf{E}$ 或 $\mathbf{H}$ 的任一分量。这时，我們把 u 了解为仅仅是坐标的函数，即不包含与时間有关的因子 $e^{-i\omega t}$。我們的問題是决定光的强度，就是决定在屏后面的任何一个观察点

[1] 以后我們所討論的衍射，都是光的衍射；所有以后的討論，当然，也可以应用到任意的电磁波上。

P 的場 u。在与几何光学相差无几的情况下的近似的解这个問題时，我們可以認为，在屏孔的点上，場与沒有屏存在时一样。換句話說，此处的場可以直接从几何光学推出。屏背面的所有点上，場可以算作零。这时，屏本身的特性(即屏物質的特性)显然不起作用。同时也很明显，在我們所考慮的情形下，对于衍射，重要的仅是屏孔的边緣形状，至于不透明的屏的形状不关紧要。

我們用任一曲面蓋着屏的孔，而这个曲面以孔的边緣为界(这样的一个曲面的断面圖用虛綫表示在圖 7-2 中)。我們将这个曲面分割为面积为 df 的若干塊，df 的大小比光的波長大很多。我們可以将这些小塊(光要經过这些小塊)中的每一塊本身当作光波的源，光波从这个小塊向各方向射出。我們来考慮在 P 点的場，这一点的場是遮蓋着屏孔的表面的所有小塊 df 在該点所产生的場的迭加的結果(这就是所謂惠更斯原理)。

小塊 df 在 P 点所产生的場显然与在小塊 df 本身上的場之值 u 成比例(提醒一下，我們已經假定了，在 df 的場与沒有屏存在时一样)。此外，在 P 点的場又与面积 df 在一个与方向 n 垂直的平面上的投影 df_n 成比例，方向 n 是光从光源到 df 的方向。这是从以下的事实得来的，即不管面元 df 的形状如何，只要投影面 df_n 保持不变，相同的光綫将經过面元 df；因此面元 df 对于 P 点的場的影响将是一样的。

由此可見，小塊 df 在 P 点所产生的場与 udf_n 成比例。此外，我們还必須考慮到波从 df 傳播到 P 点的过程中的位相与振幅的变化。这种变化的規律是由公式(7-16)来决定的。因此必須以 $\frac{1}{R}e^{ikR}$ 乘 udf_n(此处的 R 是从 df 到 P 的距离，而 k 則是光的波矢量的絕对值)，于是我們得到：所求的場与 $udf_n\frac{e^{ikR}}{R}$ 成比例，即等于

$$au\frac{e^{ikR}}{R}df_n,$$

其中 a 仍是一个未知常数。P 点的場是所有面元 df 在該点所产生的場的迭加的結果，因此它等于

$$u_P = a\int u\frac{e^{ikR}}{R}df_n, \tag{7-42}$$

此处的积分遍及以屏孔边緣为界的曲面。在我們所考慮的近似法中，这个积分当然不能与这个曲面的形状有关。公式(7-42)显然不仅可以应用到屏上有孔的衍射，而且也可以应用到光在其周圍可以自由傳播的屏的衍射。在这种情形下，(7-42)式内的积分面应該伸延到屏的各个边綫。

为了决定常数 a，我們考慮一个沿 X 軸傳播的平面波；波面与 YZ 平面平行。設 u 为場在 YZ 平面内的値。那么，P 点(我們选擇这一点在 X 軸上)的場等于 $u_P = ue^{ikx}$。另一方面，P 点的場也可以由公式(7-42)来决定，例如选取 YZ 平面为积分面。同时，因为衍射角很小，即因为与几何光学相差不大，在 YZ 平面内的点中，只有那些靠近原点的点在积分中才重要，即 $y, z \ll x$(x 是 P 点的坐标)的点。因此，

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \approx x + \frac{y^2+z^2}{2x},$$

而(7-42)則化为

$$u_P = \frac{a}{x}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} ue^{ik\left(x+\frac{y^2+z^2}{2x}\right)}dydz.$$

式中，u 是常数(在 YZ 平面内的場)；在因子 $\frac{1}{R}$ 中，我們可以使 $R \cong x =$ 常数。因此

$$u_P = au\frac{e^{ikx}}{x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dye^{ik\frac{y^2}{2x}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dze^{ik\frac{z^2}{2x}}.$$

这两个积分当然是完全一样的；若将 $y = \xi\sqrt{2x/k}$ 代入，則每个积

分都变为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2}\,d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\xi^2\,d\xi+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\xi^2\,d\xi=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i),$$

从而我們得到

$$u_P=aue^{ikx}\frac{2i\pi}{k}.$$

另一方面，$u_P=ue^{ikx}$，因此

$$a=\frac{k}{2\pi i}.$$

将它代入(7-42)式，我們最后得到所提出的問題的解如下：

$$u_P=\int\frac{ku}{2\pi iR}e^{ikR}\,df_n. \tag{7-43}$$

現在讓我們应用公式(7-43)来求一条光綫在經过它与焦散面相切之点时的位相变化的問題(見§7-2末尾)。我們选擇任意的一个波面作为在(7-43)式中的积分面，再求 P 点的場 u_P，此处的 P 点是在某一条光綫上，它与光綫同我們所选定的曲面的交点的距离为 x(我們选定这一点作为坐标原点 O，而以在 O 点与曲面相切的平面作为 YZ 平面)。在求(7-43)的积分时，仅仅曲面在 O 点附近的一个小面积是重要的。假如选擇 XY 和 XZ 平面与波面在 O 点的主曲率平面相重合，那么，在这一点的附近，曲面的方程是

$$X=\frac{y^2}{2R_1}+\frac{z^2}{2R_2},$$

式中，R_1 和 R_2 是曲率半徑。从在波面上以 X，y，z 为坐标的一点到以 x, 0, 0 为坐标的 P 点的距离 R 則是

$$R=\sqrt{(x-X)^2+y^2+z^2}\cong x+\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right).$$

在波面上，場 u 可以当作常数；因子 $1/R$ 亦可当作常数。既然我們只对波的位相变化有兴趣，所以我們略去系数，并簡單地写

$$u_P \sim \frac{1}{i} \int e^{ikR}\, df_n \cong$$

$$\cong \frac{e^{ikx}}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)} dz. \qquad (7-44)$$

波面的曲率中心是在我們所考慮的光綫上的 $x=R_1$ 和 $x=R_2$ 两点；这两点就是光綫与焦散面相切的切点，設 $R_2<R_1$，当 $x<<R_2<R_1$ 时，两个积分号内的指数式中的 i 的系数都是正数，这两个积分的每一个都与$(1+i)$成比例。因此，在未与焦散面第一次相切的这一部分光綫上，我們有 $u_P \sim e^{ikx}$。当 $R_2<x<R_1$ 时，在两个切点之間的这一部分光綫上，沿着 y 的积分与$(1+i)$成比例，但沿着 z 的积分則与 $1-i$ 成比例，因此两者之积就不包含 i。因此在这里我們有 $u_P \sim -ie^{ikx}=e^{i\left(kx-\frac{\pi}{2}\right)}$，就是說，当光綫經过第一个焦散面的附近时，光綫的位相發生了 $-\pi/2$ 的附加变化。最后，当 $x>R_1>R_2$ 时，我們有 $u_P \sim -e^{ikx}=e^{i(kx-\pi)}$，就是說当光綫經过第二个焦散面的附近时，位相又發生了一次 $-\pi/2$ 的变化。

習　題

求光綫与焦散面相切的切点附近的光强度分布。

解： 为了解决这个問題，我們利用公式(7-43)，其中的积分面可以用任意的一个波面，但这个波面离开光綫同焦散面的切点要有足够的远。在圖 7-3 中，ab 是这个波面的一段，而 $a'b'$ 是焦散面的一段；$a'b'$ 是曲綫 ab 的漸屈綫。我們所要研究的是光綫 QO 与焦散面的切点 O 附近的光强度分布；我們假設光綫 QO 段的長度 D 是足够大的。我們用 x 代表从 O 点沿着焦散面的法綫的距离，并認为在法綫上的点的 x

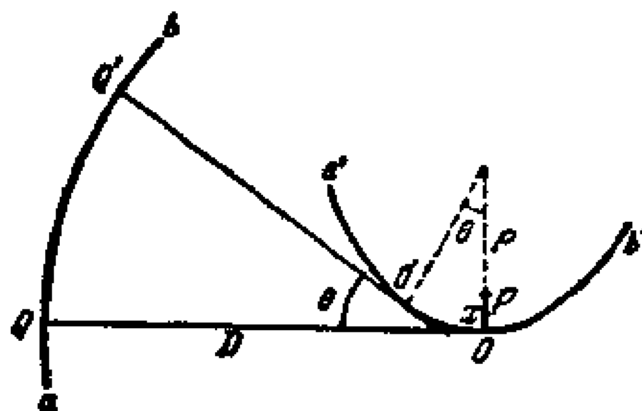


圖 7-3.

值向着曲率中心的方向为正。

(7-43)式中的被积分函数是距离 R 的函数，R 是从波面上任意一点 Q' 到 P 点的距离。按照熟知的渐屈綫的性質，弧 OO' 的長与綫 $Q'O'$ 的長之和($Q'O'$ 切于 O' 点)等于綫段 QO 之長(QO 切于 O 点)。对于互相接近的点 O 与 O'，我們有 $OO'=\theta\rho$（ρ 是焦散面在 O 点的曲率半徑)。因此 $QO'=D-\theta\rho$。距离 $Q'O$(沿直綫)近似地等于(假設 θ 角很小)①:

$$Q'O\simeq Q'O'+\rho\sin\theta=D-\theta\rho+\rho\sin\theta\simeq D-\rho\frac{\theta^3}{6}.$$

最后，距离 $R=Q'P$ 是① $R=Q'O-x\sin\theta\simeq Q'O-x\theta$，即

$$R\simeq D-x\theta-\frac{1}{6}\rho\theta^3.$$

将上式代入(7-43)，我們得到

$$u_P\sim\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx\theta-i\frac{k\rho}{6}\theta^3}d\theta=2\int_0^{\infty}\cos\left(kx\theta+\frac{k\rho}{6}\theta^3\right)d\theta.$$

(被积分函数内的 $1/R$ 的变化是很慢的，因而比起指数因子来就不重要了，所以我們假設它是常数)。引入新积分变量

$$\xi=\left(\frac{k\rho}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\theta,$$

我們得到
$$u_P\sim\Phi\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

式中，$\Phi(t)$ 即所謂艾礼函数②。

---

① 在此我們应用了两个矢量(这两个矢量中的一个的絕对值比另外一个的絕对值大很多)之和的絕对值的近似公式:

$$|\mathbf{A}+\mathbf{a}|\simeq A+a_A$$

($A\gg a$，a_A 是矢量 $\mathbf{a}$ 在矢量 $\mathbf{A}$ 方向上的投影)。

② 依照 B. A. 福克("艾礼函数表"，莫斯科，1946 年)，艾礼函数 $\Phi(t)$ 的定义是

$$\Phi(t)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi t\right)d\xi.$$

当函数的自变数的是大的正值时，$\Phi(t)$ 的漸近式是

$$\Phi(t)\approx\frac{1}{2t^{\frac{1}{4}}}e^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}},$$

就是說 $\Phi(t)$ 按照指数式趋近于零。当 t 是大的負值时，我們有公式

$$\Phi(t)\approx\frac{1}{(-t)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{2}{3}(-t)^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{4}\right),$$

就是說 $\Phi(t)$ 是振蕩的，其振幅与 $(-t)^{\frac{1}{4}}$ 成反比。

关于艾礼函数的公式与数值表，可以参看 B. A. 福克的專著[函数 $\Phi(t)$ 是用 $v(t)$ 表示的]。

对于强度 $I \sim |u_P|^2$，我們可写出

$$I=2A\left(\frac{2k^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{6}}\Phi^2\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

(关于常数因子的选擇，参考下面)。

当 x 是大的正值时，我們由此得到漸近公式

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}} \cdot exp\left\{-\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}\right\},$$

就是說强度按指数規律下降(影区)。当 x 是大的負值时，我們有

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}}\sin^2\left\{\frac{2(-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}+\frac{\pi}{4}\right\},$$

就是說强度快速地振蕩；强度在振蕩时的平均値是

$$I=\frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

由此，常数 A 的意义就很明显了，这就是从几何光学考慮而略去衍射效应所得到的与焦散面相距很远之处的光强度。

在光綫与焦散面相切处($x=0$)，我們有

$$I=0.89Ak^{+\frac{1}{3}}\rho^{-\frac{1}{6}}$$

(因为 $\Phi(0)=0.629$)。所以在焦散面的各点上，光强度与 $k^{\frac{1}{3}}$ 成比例，即与 $\lambda^{-\frac{1}{3}}$ 成比例(λ 是波長)。当 $\lambda \to 0$ 时，光强度趋向无穷大，正如它所应該的一样(見 §7-2)。

§7-8. 菲涅耳衍射

假如光源和我們求光强度的那一点 P 都位于与屏的距离为有限之处，那么，在求 P 点的光的强度时，我們在(7-43)中取积分的波面上，只有一个小区域內的点才是重要的，这个区域是在光源和 P 点的連綫上。实际上，旣然同几何光学的偏差不大，从波面的各点到达 P 点的光的强度，当我們从这条綫移开时，就减小得很快。这种仅仅只有波面的一小部分起作用的衍射現象称为菲涅耳現象。

現在我們来考慮任意一个屏的菲涅耳衍射現象。上面我們已經說过，只有在屏的边緣的一个小区域对于这种衍射是重要的。但是，对于足够小的区域，屏的边緣总可以当作一条直綫。从現在起，說屏的边緣这意思就是說这样一小段直綫。

我們选擇經过光源 Q 和屏的边緣綫的平面作为 XY 平面(圖 7-4)。我們选擇 XZ 平面同 XY 平面垂直并且經过 Q 点和观察点 P, P 点就是我們求光强度的那点。最后我們选擇坐标原点 O 在屏的边緣綫上,此后,所有三个軸的位置就完全确定了。

設从光源 Q 到原点的距离为 D_q。我們用 D_p 代表观察点的 x-坐标,而用 d 代表 P 点的 z-坐标,即从 P 点到 XY 平面的距离。按照几何光学,光只能落到 XZ 平面上面的点;至于在 XZ 平面下面的区域,按照几何光学应当是阴影(几何影区)。

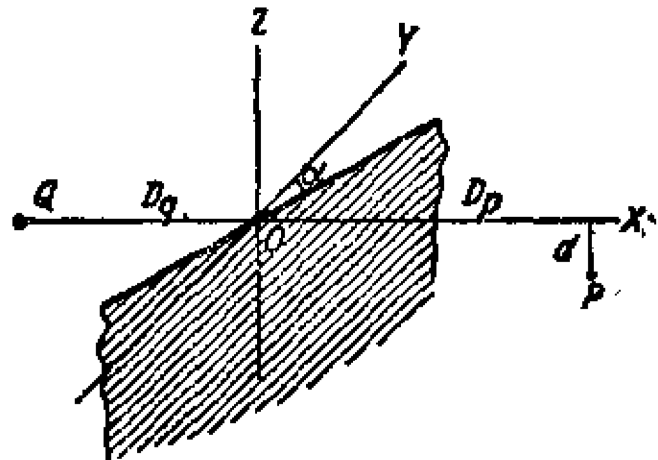


圖 7-4.

现在我們来确定在几何影区边緣附近在屏上的光强度分布,就是在 d 的值比 D_p 和 D_q 都小之处的光强度分布。d 的負值表示 P 点位于几何影区中。

我們选擇經过屏边緣綫而垂直于 xy 平面的半平面为 (7-43) 中的积分面。在这个面上的点的 x 和 y 两个坐标有 $x=y\tan\alpha$ 的关系(α 是屏边緣綫与 Y 軸所夾之角),而 z 坐标是正的。光源 Q 在相距为 R_q(从 Q 所在点算起)的地方所产生的波的場与因子 e^{ikR_q} 成比例。因此在积分面上的場 u 有下面的比例关系:

$$u\sim\exp\{ik\sqrt{y^2+z^2+(D_q+y\tan\alpha)^2}\}.$$

在积分式(7-43)中,现在 R 必須代以

$$R=\sqrt{y^2+(z-d)^2+(D_p-y\tan\alpha)^2}.$$

在被积分函数中变得慢的因子,比起指数因子来就不重要了。因此,我們可以将 $1/R$ 当作常数,而以 $dy\,dz$ 代 df_n。于是我們求得在 P 的場为

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} \exp\{ik(\sqrt{(D_q+y\tan\alpha)^2+y^2+z^2}+$$

$$+\sqrt{(D_p-y\tan\alpha)^2+(y-d)^2+z^2}\}\,dy\,dz. \quad (7\text{-}45)$$

我們已經說过，落到P点的光綫主要是从积分平面上O点附近的点而来的。因此在积分(7-45)中，只有那些比D_q和D_p都小的y和z的值才是重要的。根据这个理由，我們可以写

$$\sqrt{(D_q+y\tan\alpha)^2+y^2+z^2} \cong D_q+\frac{y^2+z^2}{2D_q}+y\tan\alpha,$$

$$\sqrt{(D_p-y\tan\alpha)^2+(y-d)^2+z^2} \cong D_p+\frac{(y-d)^2+z^2}{2D_p}-y\tan\alpha.$$

将上式代入(7-45)。既然我們只注意作为d的函数的場，所以常数因子$\exp\{ik(D_p+D_q)\}$可以略去；对z的积分所得的式子也不包含d，因而也可以略去，于是我們有

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{ik\left(\frac{1}{2D_q}y^2+\frac{1}{2D_p}(y-d)^2\right)\right\} dy.$$

这个式子也可以写成

$$u_P \sim \exp\left\{-ik\frac{d^2}{2(D_p+D_q)}\right\}\times$$

$$\times\int_0^{\infty} \exp\left\{ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)y-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}\right\} dy.$$

光的强度是为場的平方所决定，就是說，为u_P的模的平方$|u_P|^2$所决定。因此，当計算强度时，积分号前面的因子不存在了，因为用它的共軛复数式来乘，其結果为一。在积分內，我們作以下的替換：

$$\frac{k}{2}\frac{\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)y-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}=\eta^2$$

那么，我們得到

$$u_P\sim\int_{-w}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta, \tag{7-46}$$

其中

$$w=d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q+D_p)}}. \tag{7-47}$$

因此，P 点的强度 I 是

$$I=\frac{I_0}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-w}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta\right|^2=$$

$$=\frac{I_0}{2}\left\{\left(C(w)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(S(w)+\frac{1}{2}\right)^2\right\}, \tag{7-48}$$

其中

$$C(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w\cos\eta^2\,d\eta,\qquad S(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^w\sin\eta^2\,d\eta$$

称为菲涅耳积分。公式(7-48)解决了所提出的問題，即确定作为 d 的函数的光强度。我們可以看出，I_0 是在照明区内同影子边缘不太接近的点上之强度；更正确一些説，是 $w\gg1$ 的地方的光强 $\left(C(\infty)=S(\infty)=\frac{1}{2}\right)$。

几何影区与負 w 相应。在 w 为負值且絕对值很大的情况下，$I(w)$的漸近式容易求出。为此，我們按下面方式進行。作部分积分，我們有

$$\int_{|w|}^{\infty}e^{i\eta^2}d\eta=-\frac{e^{iw^2}}{2i|w|}+\frac{1}{2i}\int_{|w|}^{\infty}e^{i\eta^2}\frac{d\eta}{\eta^2}.$$

在方程式的右方再作一次部分积分，并重复这种过程，我們得到

$1/|w|$ 的冪級数：

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = e^{iw^2}\left[-\frac{1}{2i|w|}+\frac{1}{4|w|^3}-\cdots\right].$$

虽然这样的一个无穷級数不收斂，但是因为当 $|w|$ 很大时，以下的項遞減得很快，因而当 $|w|$ 足够大时第一項已經很好地代表左边的函数了（这种級数称为漸近的）。因此，对于强度 $I(w)$ (7-48)，我們得到对于大而且为負的 w 有效的下面的漸近公式：

$$I=\frac{I_0}{4\pi w^2}. \tag{7-49}$$

我們看出，在几何影区内，距影边緣很远的地方，强度与到影边緣的距离的平方成反比地趋近于零。

我們現在来考虑 w 的正值，即考虑在 XY 平面上面的区域。我們写

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2} d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2} d\eta =$$

$$=(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{w}^{+\infty} e^{+i\eta^2} d\eta.$$

对于足够大的 w，我們可以用方程式右方的积分的漸近式，于是我們有

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \cong (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2iw}e^{iw^2}.$$

将上式代入(7-48)，則我們得到

$$I=I_0\left(1+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\left(w^2-\frac{\pi}{4}\right)}{w}\right). \tag{7-50}$$

因此，在照明区域内距影边緣甚远处，强度有无穷多的極大值和極

小值，因而比值 I/I_0 在一的两边振蕩不已。将 w 增大，振蕩的振幅随着与影边緣的距离成反比地减小，極大值与極小值的位置逐漸地彼此接近。

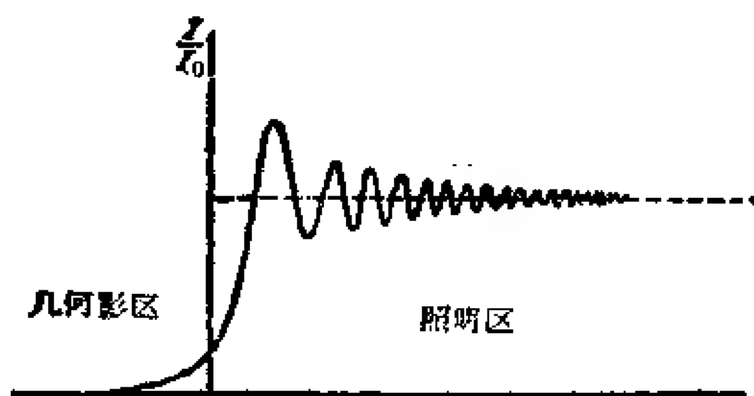


圖 7-5.

当 w 很小时，定性来說，$I(w)$ 也有同样的特性。圖 7-5 就表出了这种特性。在几何影区內，当我們从影的边界移开时，强度單調地减小。在影区边界本身上，$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{4}$。对于正的 w，强度将有交替的極大値和極小値。

§ 7-9. 夫琅和費衍射

有一完整系列的衍射情形，在这些情形中，观察点的光强度将为整个波面所决定；换句話說，在决定 u_P 的积分式(7-43)中，在其上取积分的整个波面都是重要的。在另一方面，正如以前一样，我們假設同几何光学的偏差是小的，就是說，仅仅只有那些与几何光学的路程相差不多的光綫才到达观察点 P。因此，只在下面的两种情形中，整个的波面才是重要的。

第一种情形是观察点与焦点，即与所有的光綫的几何路徑所会聚的点很接近的情形。

第二种情形是所謂"夫琅和費衍射"，这是極重要的一种情形。在夫琅和費衍射中，光源和观察点两者都位于距离屏很远的地方

(或无限远的地方)①。这时，光綫从光源出發，平行于光束行进到屏；同样地，光綫又从屏行进到观察点。因此，在夫琅和費衍射中，我們只对于光束方向的改变有兴趣，就是說，我們将寻求表示为光对原方向的偏轉角(衍射角)的函数的强度。既然我們所考慮的情形与几何光学的差别是很小的，那么，这个角就应該很小。

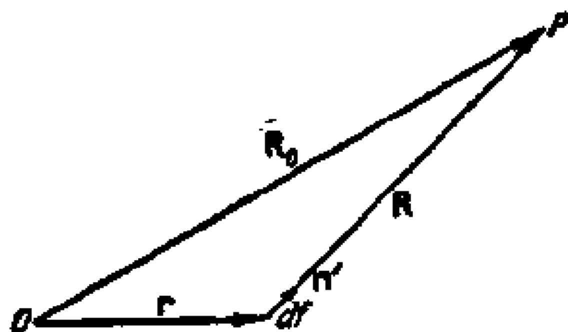


圖 7-6.

現在我們来导出一个决定經过屏和任意形状的孔的夫琅和費衍射的一般公式。假設光从左到右行进；我們选擇一个坐标系統，其原点在屏左方的任意一点。在圖 7-6 中，O 是坐标原点，P 是观察点，而 df 是波面上的某一面元，这个波面就是公式(7-43)中的积分面:

$$u_P=\int \frac{ku}{2\pi iR} e^{ikR}\, df_n.$$

在我們所考慮的夫琅和費衍射的情形中，所有入射光束中的光綫都有同一的方向，就是說，有相同的波矢量 $\mathbf{k}$ ($\mathbf{n}$ 是与 $\mathbf{k}$ 同方向的單位矢量)。观察点 P 必須与屏相距为无穷远，因此，所有从屏到 P 点的光綫必須彼此平行，就是說，有相同的波矢量 $\mathbf{k}'$ (在这个方向的單位矢量是 $\mathbf{n}'$)。$\mathbf{k}$ 与 $\mathbf{k}'$ 之間的夹角是衍射角($\mathbf{k}$ 与 $\mathbf{k}'$ 的方向当然不同，但絕对値相等)。

在 u_P 式子中的积分面上的場是 $u=u_0e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ($\mathbf{r}$ 是 O 到 df 的

① 夫琅和費衍射在实驗上当然不能在无穷远处观察，而是用一个透鏡放在屏的后面，然后在焦平面上得到衍射圖形。但是必須指出，这并不改变以后的任何公式(只要这个透鏡不太小，因而也就沒有附加的衍射现象在透鏡上發生)。

矢徑)。被积分函数中的量 $1/R$ 可以当作常数，它等于 $1/R_0$、因此，我們得到

$$u_P=\frac{ku_0}{2\pi iR_0}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,e^{ikR}\,df_n.$$

从圖 7-6 可見，$\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$。用 $\mathbf{n}'$ 乘这个方程的两边；对于足够远的点 P，矢量 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}_0$ 是平行的，因而 $\mathbf{R}_0\cdot\mathbf{n}'=R_0$。所以

$$R=R_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}',$$

于是

$$e^{ikR}=e^{ikR_0}\,e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$$

(因为 $k\mathbf{n}'=\mathbf{k}'$)。因子 e^{ikR_0} 是常数。因之，最后我們得到

$$u_P=\frac{ku_0e^{ikR_0}}{2\pi iR_0}\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}\,df_n. \qquad (7\text{-}51)$$

这个公式决定了作为衍射角的函数的强度 $|u_P|^2$。

在不透明的屏上割出一个无限長的隙，隙的两边是平行的(圖 7-7)。我們現在来考虑这个隙所产生的夫琅和費衍射。我們选擇 Z 軸与隙的边平行，而 Y 軸垂直于隙平面(XZ 平面)。

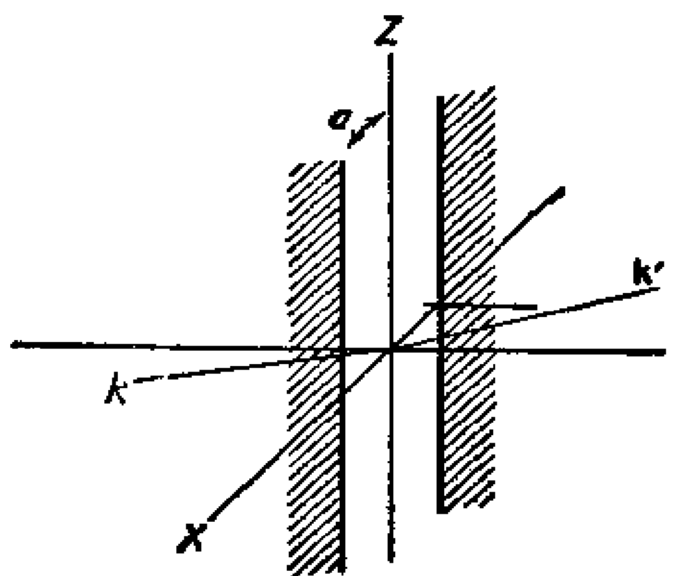


圖 7-7.

我們选擇隙两边之間的隙平面作为(7-51)式中的积分面。积分元 df_n 就是这个平面的面元 $dx\,dz$ 在 $\mathbf{k}$ 方向的投影。但是因为入射光綫都是相互平行的，所以 $\mathbf{k}$ 与面元 $dx\,dz$ 的夹角，在整个隙平面内都是一样的。因此可以略去一个常数因子，直接用 $dx\,dz$ 代替(7-51)式中的 df_n，从而得

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-a}^{+a} e^{i(k_x-k_x')x} e^{i(k_z-k_z')z}\,dx\,dz.$$

($2a$ 是隙的寬度)。符号周期性改变的函数 $e^{i(k_z-k_z')z}$ 对 dz 的积分，当 $k_z \neq k_z'$ 时，总是等于零的。因此应当有 $k_z=k_z'$，就是說，光仅仅在 XY 平面內有折射，这也是出于对称性的考虑可以预料到的。因此，u_P 的表示式化为

$$u_P \sim \int_{-a}^{+a} e^{i\kappa x}\,d\kappa,$$

其中，$\kappa=k_x-k_x'$①。經过积分，我們可得

$$u_P \sim \frac{\sin \kappa a}{\kappa a}.$$

从此，我們求得衍射到 κ 值的間隔 $d\kappa$ 內的光强度 dI：

$$dI = I_0 \frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin \kappa a}{\kappa a}\right)^2 d\kappa, \tag{7-52}$$

这里，我們这样来选定了常数因子，使 I_0 是經过隙的光的总强度（就是遍及全部 κ 值的 dI 的积分）。

$dI/d\kappa$ 作为衍射角的函数有圖 7-8 的形式。当 κ 从 $\kappa=0$ 向两边伸張时，

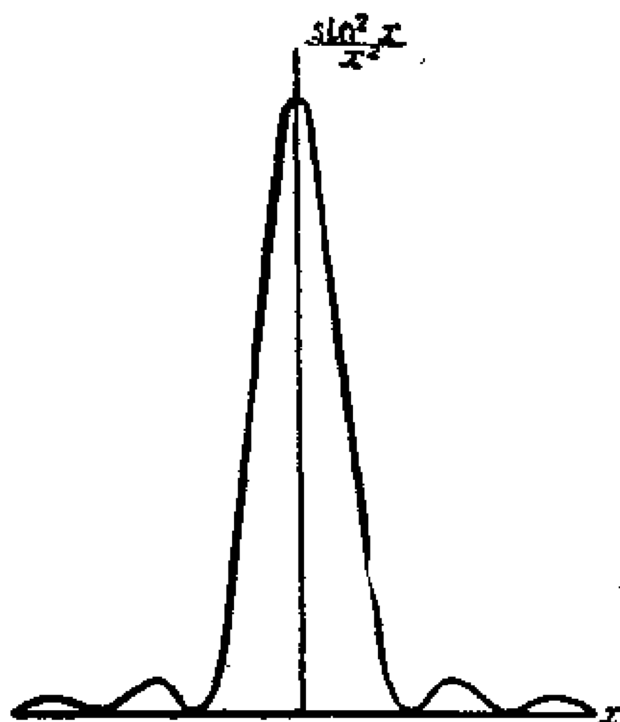


圖 7-8.

① κ 可以用衍射角 α 来表示，就是說，用 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{k}'$ 間的夹角来表示。对于小的 κ 和 α，很容易得到公式

$$\alpha = \frac{\kappa \sin(\mathbf{k}, Z)}{k \cos(\mathbf{k}, Y)},$$

式中 $(\mathbf{k}, Y)$, $(\mathbf{k}, Z)$ 是 $\mathbf{k}$ 与 Y 軸和 Z 軸的夹角。

光强度經过一系列的極大値和極小値。極大値的高度随着 κ 的增大而迅速下降；I 在 $\kappa=0$ 处有最大的極大値。在極小値处，$I=0$。相应于極小値的 κ 为下面的条件所决定：

$$\kappa a = n\pi \quad (n=\pm1, \pm2, \pm3, \cdots). \tag{7-53}$$

在第 186 頁的脚注中我們已經說过，夫琅和費衍射常常是借助于透鏡系統来观察的。一个平行光束經过透鏡会聚在它的主焦点。在經过焦点而又垂直于透鏡的光軸的平面上，除了焦点本身以外，場到处是零。假如将任何一个屏置于透鏡前面，那么，光綫束發生衍射，与此相应，我們这时在焦平面上得到的不是光源的准确的象，而是一个广延的衍射圖形。

現在我們提一提"补屏"，这个屏在第一个屏的不透明处是孔，或在第一个屏的孔处是不透明的。我們用 $u_P^{(1)}$ 和 $u_P^{(2)}$ 来代表在这两种情况下的透鏡焦平面上的場。既然 $u_P^{(1)}$ 和 $u_P^{(2)}$ 是用在屏孔上的积分来表示的，而在两个屏上的孔結合起来就构成整个平面，所以 $u_P^{(1)}+u_P^{(2)}=u_P$，这里 u_P 是屏不存在时的場。上面已經說过，除了焦点外，到处 $u_P=0$，从而 $u_P^{(1)}+u_P^{(2)}=0$，或者对于相应的光强度，

$$|u_P^{(1)}|^2 = |u_P^{(2)}|^2. \tag{7-54}$$

所以，互补的两个屏，在透鏡的整个焦平面上除了焦点本身以外，产生同样的衍射圖形，(即所謂巴俾涅原理)。

下面，我們介紹巴俾涅原理的一个有趣的推論。我們考虑任何一个黑体，即一个吸收所有落在它身上的光綫的物体。按照几何光学，当这个物体被照射时，在它的后面产生一个几何阴影区域。这个影子的横截面就等于物体在垂直于入射光綫方向的横截面。然而，由于衍射現象的存在，从物体近旁經过的光有一部分从原方向偏折了。結果，在物体后面的远处，影子就不存在了，除了在原方向行进的光以外，还有一部分的光在与原来的方向成一个小角的一些方向行进。求这个所謂散射光的强度是容易的。为此，我

們指出，按照巴傳涅原理，由在所研究的物体上的衍射而偏折的光量，等于由屏孔的衍射而偏折的光量，这个孔是从一个不透明的屏切割出来的，孔的形状和面积同物体的横截面一样。但是在孔的夫琅和費衍射中，所有經过孔的光都偏折了。由此可以断定，被黑体散射了的光的总量等于落于其上面被吸收了的光的总量。

習 題

1．求一个長方形小孔(边为 $2a$ 和 $2b$)的夫琅和費衍射。

解：这个習題的解和隙的衍射相似。引用下面的表示法：

$$k_x-k'_x=\kappa_x,\quad k_z-k'_z=\kappa_z$$

(X 和 Z 軸平行于長方形的边)，我們求得强度

$$dI=I_0\frac{ab}{\pi^2}\left(\frac{\sin\kappa_x a}{\kappa_x a}\right)^2\left(\frac{\sin\kappa_z b}{\kappa_z b}\right)^2 d\kappa_x\,d\kappa_z.$$

2．求衍射光柵的夫琅和費衍射。衍射光柵是一个平面屏上面刻了一系列完全一样的平行隙，隙的寬度为 $2a$，隙与隙之間的不透明的屏的寬度为 $2b$，隙的总数为 N。

解：我們选定光柵的平面作为 XZ 平面，Z 軸与隙平行。将(7-51)积分，得

$$u_p=u'_p\sum_{n=0}^{N-1}e^{2in\kappa d}=u'_p\frac{1-e^{2iN\kappa d}}{1-e^{2i\kappa d}},$$

式中，$\kappa=k_x-k'_x$，$d=a+b$，而 u'_p 則是沿一个隙积分的結果。利用(7-52)，我們得到强度 $|u_p|^2$ 如下：

$$dI=\frac{I_0}{N}\frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin N\kappa d}{\sin\kappa d}\right)^2\left(\frac{\sin\kappa a}{\kappa a}\right)^2 d\kappa,$$

(I_0 是經过所有隙的总光强度)。

在有很多隙的情形下，就是当 $N\to\infty$ 时，这个公式可以写成另一形式。对于 $\kappa=\pi n/d$ 的值(n 是整数)，$dI/d\kappa$ 有一极大值：在这些極大值的近旁，(即 $\kappa d=n\pi+\varepsilon$，$\varepsilon$ 很小)：

$$dI=\frac{I_0}{N}\frac{a}{\pi}\left(\frac{\sin\kappa a}{\kappa a}\right)^2\frac{\sin^2 N\varepsilon}{\varepsilon^2}d\kappa.$$

但是当 $N\to\infty$ 时，下面的公式成立①：

---

① 按照傅里叶級数理論中熟知的公式

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}f(x)\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}dx\right\}=f(0).$$

由此可見，函数 $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\right)$ 的特性实际上与 δ-函数的特性相合（見 §4-3)。

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\sin^2 Nx}{Nx^2}\right)=\pi\delta(x),$$

就是說在每个極大値的近旁的总强度是

$$I=I_0\frac{d}{\pi a}\cdot\frac{\sin^2\left(n\pi\frac{a}{d}\right)}{n^2}.$$

3、求圓孔的夫琅和費衍射。圓的半徑为 a，光垂直射入孔的平面。

解：我們引用圓柱坐标 z, r, φ，Z 軸經过圓孔的心，并垂直于圓孔的平面。我們用 κ 代表 $\mathbf{k}'$ 在这个平面上的投影（$\kappa=k\alpha$，其中，α 是衍射角）。从对称性的考虑可以断定，衍射仅与 κ 有关，因此我們可以只考虑在 $\varphi=0$ 的平面内行进的光綫。从公式(7-51)得到

$$u_p=\frac{ku_0e^{ikR_0}}{2\pi iR_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}e^{-i\kappa r\cos\varphi}r\,d\varphi\,dr=$$

$$=\frac{e^{ikR_0}ku_0}{iR_0}\int_0^a J_0(\kappa r)r\,dr,$$

式中，$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ix\cos\varphi}d\varphi$ 是零阶的貝塞耳函数，而 u_0 则是在孔本身上的場。从貝塞耳函数的理論我們知道，

$$\int_0^a J_0(\kappa r)r\,dr=\frac{aJ_1(a\kappa)}{\kappa}.$$

衍射到立体角 do 内的强度可用 R_0^2do 乘 $|u_p|^2$ 得到。結果，我們求得衍射光的强度

$$dI=I_0\frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi\alpha^2}do,$$

式中，I_0 是入射光的总强度。

第八章　运动电荷的場

§8-1. 推迟势

在第五章中我們研究了静止电荷所产生的恒定場，而在第六章中我們研究了沒有电荷存在的变化場。現在我們来研究有任意运动着的电荷存在的变化場。

我們来推导决定任意电磁場的势的方程。这个推导用四度形式为最便利。为此，我們将麦克斯韋第二对方程写成(4-25)的形式：

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=\frac{4\pi}{c}j_i.$$

将用势来表示的 F_{ik} 的式子代入，即将

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

代入，我們得到

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\,\partial x_k}-\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2}=\frac{4\pi}{c}j_i. \tag{8-1}$$

現在給势 A_i 加上补助条件

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0; \tag{8-2}$$

写成三度形式，它就是

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{8-3}$$

这个条件是以前加在势上的条件的推广。例如，对于恒定場，(8-3)就化为 $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$，就是說化为与(5-52)一样的条件。对于在眞空中的电磁場（§6-1），我們过去曾这样选擇势，即使 $\varphi=0$，

div A = 0; 这些势显然也满足条件(8-3)①。

方程(8-1)現在化为

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_k^2} = -\frac{4\pi}{c} j_i. \tag{8-4}$$

这是一个决定任意电磁場的势的方程。如用三度形式表示，这个方程可以写成两个方程，一个是 $\mathbf{A}$ 的方程，一个是 φ 的方程:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{8-5}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{8-6}$$

对于恒定場，这些方程就化为熟知的方程(5-4)和(5-53)，对于沒有电荷的变化場就化为方程(6-6)。在(8-5)和(8-6)中，ρ 和 $\mathbf{j}$，一般来說，都是所有坐标和时間的函数。

我們知道，非齐次綫性方程(8-5)和(8-6)的解可以用一个和来表示，这个和的第一項是不要右边項的这些方程的通解，第二項是要右边項的这些方程的特解。为了寻找这个特解，我們将整个空間分为无限小的区域，求其中的一个体积元內的电荷所产生的場。由于这些場方程是綫性的，实际的場将是每个体积元所产生的場之和。

在某一体积元內的电荷 de 一般来說是时間的函数。假如我們选擇坐标原点在我們所考虑的体积元內，那么，电荷密度是 $\rho = de(t)\,\delta(\mathbf{R})$，此处的 $\mathbf{R}$ 是到原点的距离(我們只考虑这一个元)。

因此，我們必須解方程

① 我們必須注意，虽然在势 φ 和 $\mathbf{A}$ 上加了补助条件(8-3)，然而这些势仍不是完全單值的。例如，我們可以将 grad f 加到 $\mathbf{A}$ 上，而同时从 φ 中减去 $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$，但是現在函数 f 已經不是任意的了，而必須満足方程

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

这是很容易証明的。

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\,d_e(t)\,\delta(\mathbf{R}). \tag{8-7}$$

除原点外，到处 $\delta(\mathbf{R})=0$, 因而我們有方程

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0. \tag{8-8}$$

显然，在我們所考虑的情形下，φ 具有中心对称性，就是說，φ 仅是 R 的函数。因此，假如我們将拉普拉斯算符写成球坐标形式，(8-8)就化为

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0.$$

为了解这个方程，我們作 $\varphi=\chi(R,t)/R$ 的替换，那么，对于 χ 我們得到方程

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0.$$

但是这是平面波的方程，它的解有如下的形式(見§6-2)：

$$\chi=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right).$$

既然我們只求方程的特解，那么只选 f_1 和 f_2 中的任意一个就够了。通常我們取 $f_2=0$ 是便利的（关于这点，可参看后面）。因此，除了原点外，φ 到处有下列形式：

$$\varphi=\frac{\chi\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{8-9}$$

这个等式中的函数 χ 暂且是任意的；現在我們如此地选擇它，使得在原点也能得到势的正确的值。換句話說，我們必須如此地选擇 χ，使方程（8-7）在原点也得到满足。这是很容易办到的，須注意当 $R\to 0$ 时，势将趋向无穷大，因此，它对坐标的导数比它对时間的导数增加得快些。所以，当 $R\to 0$ 时，在方程(8-7)中，同 $\Delta\varphi$ 比較，$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ 这一项就可以略去了。这时，（8-7）化为熟知的方程(5-9)，后者导致庫侖定律。因此，在原点的附近，(8-9)应該化

为庫侖定律，由此可以推出 $\chi(t)=de(t)$，即

$$\varphi=\frac{de\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{8-10}$$

由此很容易推得对于任意分布的电荷 $\rho(x, y, z, t)$ 的方程(8-6)的解。为此我們将(8-10)中的 de 写成 $de=\rho\, dV$ (dV 是体积元)，并在整个空間取积分就够了。因此，在所得的非齐次方程(8-6)的解上，我們还要加上略去右边的方程(8-6)的解 φ_0。由此可見，(8-6)的通解有下面的形式：

$$\varphi(x, y, z, t)=\int \frac{1}{R}\rho\left(x', y', z', t-\frac{R}{c}\right)dV'+\varphi_0,$$

$$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2, \quad dV'=dx'\, dy'\, dz'$$

(R 是从体积元 dV 到我們求势的那点的距离)。我們将此式簡写为

$$\varphi=\int \frac{\rho_{t-R/c}}{R}\, dV+\varphi_0, \tag{8-11}$$

式中，指标 $t-R/c$ 表明 ρ 这个量应当取 $t-R/c$ 这一瞬間的值，而在 dV 上的一撇已略去了。

方程(8-5)可以用完全相似的方法求解。显然，

$$\mathbf{A}=\frac{1}{C}\int \frac{\mathbf{j}_{t-R/C}}{R}dV+\mathbf{A}_0, \tag{8-12}$$

式中，$\mathbf{A}_0$ 是略去右边项的方程(8-5)的解。

略去 φ_0 和 $\mathbf{A}_0$ 的势(8-11)和(8-12)称为推迟势。

假如电荷是靜止的(即 ρ 与时間无关)，公式(8-11)就化为熟知的靜电場的公式(5-8)，$\varphi=\int \frac{\rho}{R}dV$，而(8-12)經过求平均值以后則变为靜磁場的公式(5-54)。

在(8-11)式中的 φ_0 和(8-12)式中的 $\mathbf{A}_0$ 要这样来决定，使問題的条件得到滿足。为此，显然只須給出初始条件就够了，就是給

出場在开始时的值。但是通常我們并不必須討論这些初始条件。代替初始条件，我們給出在与电荷系統相距很远之处，在一切时候的条件。因此，我們可以說，輻射是从系統外面射到系統上的。与此相应，輻射与系統相互作用的結果所产生的場与外場的差别仅仅是系統所發出的輻射。这个系統所發出的輻射，在远处有波的形式，由系統向外沿着 R 增加的方向傳播。但是因为我們使 $f_2=0$，所以这个条件为(8-11)和(8-12)形式的解所滿足，即为推迟势形式的解所滿足。因此，在这些解中，第一項代表系統所产生的場，而 φ_0 和 $\mathbf{A}_0$ 必須等于作用于系統上的外場。

§8-2. 李納特-魏西尔特势

讓我們应用(8-11)和(8-12)两公式到一个任意运动的电荷(基本粒子)所产生的場。在这种情形下，在推迟势中的被积分函数仅仅在一些孤立的点上才不为零。因为很容易看出，在每一个給定的瞬間，它們仅仅在空間的一点上不为零。为此，我們选擇观察点 P 的坐标为 x, y, z，而观察的时間为 t，即以 x, y, z, t 为四度坐标系統的原点 O，并且作“光錐”(見§1-3)，以时間軸为錐軸。这个錐的下半个表面包圍着“絶对”过去的区域(对事件 O 而言)，并是这样一些点的軌迹，光信号可从这些点达到世界点 O。这个曲面同运动电荷的世界綫的交点显然就是(8-11)和(8-12)中的被积分函数不为零的世界点。但是既然粒子的速度总小于光速，它的运动的世界綫对于时軸的“斜度”无論在何处总小于光錐的面的“斜度”。由此可知，粒子的世界綫仅仅在一点能与光錐的下半个曲面相交。与这一点相应的时間 t' 为方程

$$t'+\frac{R(t')}{c}=t \qquad (8-13)$$

所决定，其中，t 是观察的瞬間，而 $R(t')$ 則是从电荷到观察点的距

离，它是一个已知的时間函数。

为了計算势，我們必須假設电荷有一个有限的綫度，然后再使这个綫度趋近于零。这时，(8-11)和(8-12)中被积分函数内的因子 $\frac{1}{R}$ 显然可以从积分符号内提到外面来。然而在(8-11)中，不可能簡單地用电荷 e 的值代替 ρ 的积分，因为积分体积中的不同点与不同的时間 $t-\frac{R}{c}$ 相应。

可以这样做的条件是：在由方程(8-13)所决定的 t' 瞬間，粒子是靜止的。換句話說，粒子在 t' 瞬間为靜止的一个参考系統中，观察点在 t 瞬間的势是

$$\varphi=\frac{e}{R}, \quad \mathbf{A}=0, \tag{8-14}$$

式中的 R，在这个参考系統中，是在 t' 瞬間从电荷到观察点的距离。

在任意的一个参考系統中，势的表示式可以直接从求一个四度矢量得之，这个四度矢量当 $\mathbf{V}=0$ 时与方才所得的 φ 及 $\mathbf{A}$ 的表示式相合。应当注意，(8-14)中的 φ 也可以写成下面的形式：

$$\varphi=\frac{e}{c(t-t')}$$

[按照(8-13)]，我們求得所要求的四度矢量是

$$A_i=-e\frac{u_i}{R_k u_k}, \tag{8-15}$$

其中 u_i 是电荷的四度速度，R_k 是四度矢量，其分量为 $(x-x')$，$(y-y')$，$(z-z')$，$ic(t-t')$，并且 x'，y'，z'，t' 彼此之間有关系式(8-13)，这个关系式写成四度形式是

$$R_i^2=0. \tag{8-16}$$

现在再变为三度表示法，我們得到一个任意运动的点电荷所产生的場的势如下：

$$\phi=\frac{e}{\left(R-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}}{c}\right)},\quad \mathbf{A}=\frac{e\mathbf{V}}{c\left(R-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}}{c}\right)},\tag{8-17}$$

其中 $\mathbf{R}$ 是从电荷所在点到观察点 P 的矢徑，而在方程右边的所有的量都必須取在时間 t' 的值，t' 为方程(8-13)所决定。場的势写成(8-17)的形式称为李納特-魏西尔特势。

为了从公式

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi,\quad \mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

来計算电場和磁場的强度，我們必須将 φ 和 $\mathbf{A}$ 对点坐标 $x, y, z,$ 和观察时間 t 微分。但是公式(8-17)是用 t' 的函数来表示势，而只有通过关系式(8-13)才能表示势为 $x, y, z,\ t$ 的隐函数。因此，为了計算所需要的导数，必須先計算对 t' 的导数。将 $R(t')=$ $=c\cdot(t-t')$ 对 t 微分，得

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t}=c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right),$$

$\frac{\partial R}{\partial t'}$ 的值由微分恒等式 $R^2=\mathbf{R}^2$，并将 $\frac{\partial\mathbf{R}(t')}{\partial t'}=-\mathbf{V}(t')$①，或

$$\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}}{Rc}}\tag{8-18}$$

代入来求得。同理，将同一个关系式对坐标微分，我們得到

$$\operatorname{grad}t'=-\frac{1}{c}\operatorname{grad}R(t')=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad}t'+\frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

因此

$$\operatorname{grad}t'=-\frac{\mathbf{R}}{c\left(R-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)}.\tag{8-19}$$

利用这些公式，求場 $\mathbf{E}$ 及 $\mathbf{H}$ 的运算过程就不难了。略去运算

① 因为 $\mathbf{R}$ 是从电荷 e 到 P 点的矢徑，而不是从 P 点到电荷 e 的矢徑，所以前面有負号。

中的中間过程，我們得到結果：

$$\mathbf{E}=e\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{V}}{c}R\right)+$$

$$+\frac{e}{c^2\left(R-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)^3}\mathbf{R}\times\left\{\left(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{V}}{c}R\right)\times\dot{\mathbf{V}}\right\}, \qquad (8\text{-}20)$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{R}\mathbf{R}\times\mathbf{E}. \qquad (8\text{-}21)$$

这里的 $\dot{\mathbf{V}}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t'}$；等式右边所有的量都是取在 t' 瞬間的值。值得注意，磁場无論在何处都与电場垂直。

最后我們将李納特-魏西尔特势写成另一形式，这个形式在某些情形下有用。将(8-13)和(8-18)代入(8-17)，我們就得到

$$\varphi=\frac{e}{c\,(t-t')}\frac{\partial t'}{\partial t},\ \mathbf{A}=\frac{\mathbf{V}}{c}\varphi. \qquad (8\text{-}22)$$

§8-3. 推迟势的光譜分解

运动电荷所产生的場可以展开为單色波。場的不同的單色分量（傅里叶分量）的势具有 $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$, $A_\omega e^{-i\omega t}$ 的形式；任何其他描写場的量都有相似的形式。产生場的电荷系統的电荷密度和电流密度也都可以展开为傅里叶級数或傅里叶积分。很清楚，ρ 和 $\mathbf{j}$ 的傅里叶分量产生場的相应的單色分量。

为了用电荷密度和电流的傅里叶分量表示場的傅里叶分量，我們分别用 $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$ 和 $\rho_\omega e^{-i\omega t}$ 代替(8-11)式中的 φ 和 ρ，这样，就得到

$$\varphi_\omega e^{-i\omega t}=\int\rho_\omega\frac{e^{-i\omega(t-R/c)}}{R}dV.$$

将 $e^{-i\omega t}$ 消去，并引用波矢量的絕对值 $k=\frac{\omega}{c}$，我們得到：

$$\varphi_\omega = \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV. \tag{8-23}$$

同样，对于 $\mathbf{A}_\omega$，我們得到[1]

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV. \tag{8-24}$$

我們指出，公式(8-23)是更广泛形式的泊松方程

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho_\omega \tag{8-25}$$

的解[这个方程是从(8-6)得来的，在(8-6)中，ρ 和 φ 同时間的关系是 $e^{-i\omega t}$]。当 $k=0$ 时，公式(8-23)变为公式(5-8)。

假如我們所研究的是展开为傅里叶积分，那么，电荷密度的傅里叶分量是(见 § 6-6)

$$\rho_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho e^{+i\omega t} dt.$$

将上式代入(8-23)，我們得到

$$\varphi_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + kR)} dV\, dt. \tag{8-26}$$

假如我們所研究的是在时間間隔 T 内展开为傅里叶級数（T 为場的周期），那么，我們将有[比較(6-34)]

$$\varphi_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega_0 n t + kR)} dV dt. \tag{8-27}$$

$\mathbf{A}_n$ 的类似表示式与上式的差别只是在积分号内用 $\frac{1}{c}\mathbf{j}$ 代替了 ρ。

我們应用这些公式到一个运动的点电荷所产生的場。設 $\mathbf{r}_0(t)$

---

[1] 我們把 φ_ω 和 $\mathbf{A}_\omega$ 的表示式写成复数形式。应該記着，在这些情形中，以后我們总是取其与 $e^{-i\omega t}$ 之积的实数部分，而不是取其本身的实数部分。

是电荷的矢徑，它是时間的已知函数，那么，电荷密度是

$$\rho=e\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)]. \tag{8-28}$$

将此式代入(8-26)，再对 dV 积分（这样积分归結为用 $\mathbf{r}_0(t)$ 代替 $\mathbf{r}$），我們便得到

$$\varphi_\omega=\frac{e}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{R(t)}e^{i[\omega t+kR(t)]}dt. \tag{8-29}$$

同样，对于矢势，我們得到

$$\mathbf{A}_\omega=\frac{e}{2\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathbf{V}(t)}{R(t)}e^{i[\omega t+kR(t)]}dt. \tag{8-30}$$

式中 $\mathbf{V}=\dot{\mathbf{r}}_0(t)$ 是电荷的速度，而 $R(t)$ 是从电荷到观察点的距离。

習 題

把等速直綫运动的电荷所产生的場展开为平面波。

解：我們按照 § 6-8 中的方式进行。我們将电荷密度写为 $\rho=e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{V}t)$ 的形式，此处的 $\mathbf{V}$ 是电荷的速度。取方程

$$\Box\varphi=-4\pi e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{V}t),$$

的傅里叶分量，我們得到

$$(\Box\varphi_{\mathbf{k}})=-\frac{e}{2\pi^2}e^{-i(\mathbf{V}\cdot\mathbf{k})t}.$$

另一方面，由于 $$\varphi=\iiint e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_{\mathbf{k}}\,dk_x\,dk_y\,dk_z,$$

所以我們有 $$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}}=-k^2\varphi_{\mathbf{k}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

因此， $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}+k^2\varphi_{\mathbf{k}}=\frac{e}{2\pi^2}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})t},$$

从而，最后得到 $$\varphi_{\mathbf{k}}=\frac{e}{2\pi^2}\frac{e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})t}}{k^2-\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)^2}.$$

从此可以推断，以 $\mathbf{k}$ 为波矢量的波的頻率是 $\omega=\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}$。同样，我們得到矢势

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}=\frac{e}{2\pi^2}\frac{\mathbf{V}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})t}}{k^2-\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)^2}.$$

最后，我們得到場的表示式如下：

$$\mathbf{E}_k=-i\mathbf{k}\varphi_k+i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\mathbf{A}_k=\frac{e}{2\pi^2}\,i\,\frac{-\mathbf{k}+\dfrac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}{c^2}\mathbf{v}}{k^2-\left(\dfrac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t},$$

$$\mathbf{H}_k=i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_k=\frac{e}{2\pi^2}\,i\,\frac{\mathbf{k}\times\dfrac{\mathbf{v}}{c}}{k^2-\left(\dfrac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^2}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})t}.$$

§8-4. 准确到二阶的拉格朗日函数

在普通經典力学中，我們利用仅仅与粒子(在同一瞬間)的坐标和速度有关的拉格朗日函数来描写彼此相互作用的粒子体系。这种作法的可能性，归根到底是取决于，在經典力学中假定粒子間的相互作用的傳播速度是无限大。

我們已經知道，因为相互作用的傳播速度是有限的，場必須認为是一个有本征“自由度”的独立体系。由此可得出結論：假如我們有一个相互作用的粒子(电荷)体系，那么，为了描写它，我們就必須認为这个体系是由这些粒子和場組成。因此，当考慮到相互作用傳播速度的有限性时，一般說来，不可能用仅仅和粒子的坐标和速度有关的，而并不包含与場的本征“自由度”有关的任何量的拉格朗日函数来描写相互作用的粒子体系。然而，假如所有粒子的速度 v 都比光速小很多，那么，这个电荷体系就可以用某一个近似的拉格朗日函数来描写。这时，就可能引用一个拉格朗日函数，这个拉格朗日函数不仅在忽略所有 $\frac{v}{c}$ 的冪的情况下描写这个体系(經典的拉格朗日函数)，而且还准确到 $\frac{v^2}{c^2}$ 的数量級(达尔文，1920年)。

我們預先指出，在零級近似中，即当我們完全略去势的推迟时，电荷体系的拉格朗日函数有以下的形式：

$$L=\sum_{A}\frac{1}{2}m_A v_A^2-\frac{1}{2}\sum_{A\neq B}\frac{e_A e_B}{R_{AB}} \tag{8-31}$$

(求和应該对于組成电荷体系的所有电荷进行)。第二項是相互作用的势能,正如静止电荷的情况一样[見(5-16)]。

为了得到拉格朗日函数的高一級的近似式，我們按下述方式进行。在外場中的电荷的拉格朗日函数是[見(3-4)]

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-e\varphi+\frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{V}.$$

选定电荷体系中的任意一个电荷，我們求出所有其余电荷在第一电荷所在点产生的場的势，并且用产生这个場的电荷的坐标和速度来表示这些势$\left(\text{这剛好可以作到这样的近似程度，即对于 }\varphi\text{，准确到}\frac{v^2}{c^2}\text{；对于 }\mathbf{A}\text{，准确到 }\frac{v}{c}\right)$。将这样求得的势的表示式代入上面所写的$L$的表示式，我們就得到电荷体系中的一个电荷的拉格朗日函数(当其余电荷的运动已知时)。从此不难求出整个体系的拉格朗日函数L。

我們依据推迟势的表示式(8-11)和(8-12):

$$\varphi=\int\frac{\rho_{t-R/c}}{R}dV,\quad \mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R}dV.$$

假如所有电荷的速度都比光速小很多,那么，电荷的分布,即ρ和$\mathbf{j}$,在时間$\frac{R}{c}$内不致于有显著的改变。因此，我們可以将$\rho_{t-R/c}$和$\mathbf{j}_{t-R/c}$展开为$\frac{R}{c}$的冪級数。因此，对于标势，我們得到准确到二阶項的表示式

$$\varphi=\int\frac{\rho dV}{R}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\rho dV+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho dV$$

(沒有指标的ρ是指它在t瞬間的值，$\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 显然可以从积分号内提出)。但是 $\int\rho dV$ 是总电荷，它是一个与时間无关的常数。

因此上式中的第二項为零，从而

$$\varphi=\int\frac{\rho dV}{R}+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho dV. \tag{8-32}$$

对于 $\mathbf{A}$，我們也可以用同样方式进行。但是用电流密度表示矢势的式子已經包含了 $\frac{1}{c}$，而当我們把它代入拉格朗日函数时，还要乘上 $\frac{1}{c}$。既然我們正在求仅仅准确到二阶的拉格朗日函数，我們在 $\mathbf{A}$ 的展开式中只取其第一項就足够了，即

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\rho\mathbf{V}}{R}dV \tag{8-33}$$

(我們已經将 $\mathbf{j}=\rho\mathbf{V}$ 代入)。

我們假設只有一个單独的点电荷 e（假如有許多电荷，就对求得的式子再求和），那么，对于这个电荷所产生的場的两个势（标势 φ，和矢势 $\mathbf{A}$），我們从(8-32)和(8-33)两式得到

$$\varphi=\frac{e}{R}+\frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2R}{\partial t^2},\quad \mathbf{A}=\frac{e\mathbf{V}}{cR}, \tag{8-34}$$

式中 R 是同电荷的距离。

通过变换

$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad} f,$$

我們选择另外两个势 φ' 和 $\mathbf{A}'$ 来代替 φ 和 $\mathbf{A}$。并且我們选擇 f 如下：

$$f=\frac{e}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

这时，我們得到

$$\varphi'=\frac{e}{R},\quad \mathbf{A}'=\frac{e\mathbf{V}}{cR}+\frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}.$$①

为了計算 $\mathbf{A}'$，首先我們注意到 $\nabla\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla R$。在此处的符号

---

① 既然 φ' 和 $\mathbf{A}'$ 不满足条件(8-3)，它們也就不满足达朗貝尔方程。同时，假如从 φ 同 $\mathbf{A}$ 能得到場的正确結果，那么，当然，从 φ' 和 $\mathbf{A}'$ 也能得到場的正确結果。

∇是指对我們正在求 $\mathbf{A}'$ 之值的观察点的坐标的微分。因此 ∇R 是一个單位矢量 $\mathbf{n}$, 从电荷 e 指向观察点，所以

$$\mathbf{A}'=\frac{e\mathbf{V}}{cR}+\frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}}.$$

为了計算 $\dot{\mathbf{n}}$, 我們写出

$$\dot{\mathbf{n}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right)=\frac{\dot{\mathbf{R}}}{R}-\frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

但是对于一指定的观察点，导数 $\dot{\mathbf{R}}$ 是 $-\mathbf{V}$ (电荷速度为 $\mathbf{V}$)，至于导数 $\dot{R}$，只要微分等式 $R^2=\mathbf{R}^2$ 亦即写出

$$R\dot{R}=\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{R}}=-\mathbf{R}\cdot\mathbf{V},$$

就很容易确定。因此，

$$\dot{\mathbf{n}}=\frac{-\mathbf{V}+\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})}{R}.$$

将此式代入 $\mathbf{A}'$ 的表示式，我們最后得到

$$\varphi'=\frac{e}{R},\quad \mathbf{A}'=\frac{e\{\mathbf{V}+(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}\}}{2cR}. \tag{8-35}$$

假如有許多电荷，那么，显然，我們必須对于所有的电荷求和。

假如将这些势的表示式代入一个在外場中的电荷的拉格朗日函数，我們就得到一个电荷 e_A 的拉格朗日函数 L_A(当所有余电荷的运动为已知时。这时，我們也必須将动能 $-m_Ac^2\sqrt{1-\left(\frac{v_A^2}{c^2}\right)}$ 展开为$\frac{v_A}{c}$的幂級数，并保留到二阶項为止。这样，我們就得到下面的 L_A 的表示式：

$$L_A=\frac{m_Av_A^2}{2}+\frac{1}{8}\frac{m_Av_A^4}{c^2}-e_A\sum_B\frac{e_B}{R_{AB}}+$$
$$+\frac{e_A}{2c^2}\sum_B\frac{e_B}{R_{AB}}[\mathbf{V}_A\cdot\mathbf{V}_B+(\mathbf{V}_A\cdot\mathbf{n})(\mathbf{V}_B\cdot\mathbf{n})]$$

(求和应对于除 e_A 以外的所有其余电荷进行；$\mathbf{n}$ 是从 e_B 到 e_A 的單位矢量)。

由此就不难求出整个体系的拉格朗日函数。不难理解，这个函数不是所有电荷的 L_A 之和，而有如下的形式:

$$L=\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}+\sum_A \frac{m_A v_A^4}{8c^2}-\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}+$$

$$+\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{2c^2 R_{AB}}\left[\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{V}_B+(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{n})(\mathbf{V}_B \cdot \mathbf{n})\right]. \quad (8-36)$$

实际上，对于电荷中的每一个，在所有其余电荷的运动为已知的情况下，函数 L 化为上面求得的 L_A。(8-36)式决定电荷体系的准确到二阶的拉格朗日函数。

最后，我們还要求电荷体系的哈密頓函数，并要有同样的近似程度。这个可应用从 L 求 $\mathscr{H}$ 的一般法則进行；然而用下面的方法来求，則更为簡單。在(8-36)式中的第二和第四两項是对 $L_0=\sum_A \frac{m_A v_A^2}{2}-\sum_{A>B} \frac{e_A e_B}{R_{AB}}$ 的小修正。另一方面，从力学我們知道当 L 和 $\mathscr{H}$ 有小的变化时，加到它們上面的小量的数值相等，符号相反(在此，L 的变化是發生在坐标和速度为恒定的情况下，而 $\mathscr{H}$ 的变化，是發生在坐标和冲量为恒定的情况下[①])。

① 假如除了坐标和速度以外，拉格朗日函数还与某个参数 λ 有关，那么

$$dL=Fdq+pd\dot{q}+\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda$$

($F=\partial L/\partial q$, $p=\partial L/\partial \dot{q}$ 是广义力和广义冲量)。对于 $\mathscr{H}=p\dot{q}-L$，我們有

$$d\mathscr{H}=-Fdq+\dot{q}dp-\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}} d\lambda,$$

所以

$$\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda}\right)_{q,p}=-\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}}.$$

当参数 λ 有小的变化时，$\mathscr{H}$ 和 L 也变化得很小；从上面的等式可以看出，$\delta\mathscr{H}$ 和 δL 这两个变化有 $(\delta\mathscr{H})_{q,p}=-(\delta L)_{q,\dot{q}}$ 的关系(括弧下面的指标表示这些量应該当作常量)。

因此我們从 $\mathscr{H}_0=\sum_A \frac{p_A^2}{2m_A}+\sum_{A>B}\frac{e_Ae_B}{R_{AB}}$ 中减去(8-36)式的第二和第四两項，用冲量代替其中的速度$\left(\mathbf{v}_A=\frac{\mathbf{p}_A}{m_A}\right)$，就可立刻写出 $\mathscr{H}$，这样可得

$$\mathscr{H}=\sum_A\frac{p_A^2}{2m_A}-\sum_A\frac{p_A^4}{8c^2m_A^3}+\sum_{A>B}\frac{e_Ae_B}{R_{AB}}-$$

$$-\sum_{A>B}\frac{e_Ae_B}{2c^2m_Am_BR_{AB}}[\mathbf{p}_A\cdot\mathbf{p}_B+(\mathbf{p}_A\cdot\mathbf{n})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})]. \quad (8-37)$$

習 題

1. 确定(准确到二阶止)相互作用的粒子体系的惯性中心。

解：体系作为一个整体的速度可以用下面的公式来决定：

$$\mathbf{V}=\dot{\mathbf{R}}=\frac{c^2\mathbf{P}}{\mathscr{E}},$$

式中，$\mathbf{P}=\sum_A\mathbf{p}_A=\sum_A\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_A}$ 是这个体系的总冲量，而 $\mathscr{E}$ 则是它的能量，等于 $\Sigma m_Ac^2+\mathscr{H}$ [写成 (8-37) 式的 $\mathscr{H}$ 不包括粒子的静止能]。将相应的式子代入后，这个关系是可以对时間积分的，所以相互作用的粒子体系的惯性中心的概念，实际上在我們所考虑的近似中有意义。惯性中心的矢徑的表示式是

$$\mathbf{R}=\frac{\Sigma\mathscr{E}_A\mathbf{r}_A}{\Sigma\mathscr{E}_A},$$

式中，

$$\mathscr{E}_A=m_Ac^2+\frac{p_A^2}{2m_A}+\frac{e_A}{2}\sum_{A\neq B}\frac{e_B}{R_{AB}}.$$

2. 試求由两个粒子构成体系的哈密頓函数(准确到二阶，略去体系整体的运动)。

解 我們选擇一个参考系統，在这个系統中，两个粒子的总冲量为零。将冲量写为作用量的导数，則我們有 $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=\partial S/\partial\mathbf{r}_1+\partial S/\partial\mathbf{r}_2=0$。由此可見，在我們所选擇的参考系統中，作用量是 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ 的函数，$\mathbf{r}$ 是两个粒子的矢徑之差。因此，我們有 $\mathbf{p}_2=-\mathbf{p}_1=\mathbf{p}$，这里的 $\mathbf{p}=\partial S/\partial\mathbf{r}$ 是两个粒子的相对运动的冲量。哈密頓函数等于

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p^2-\frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)p^4+$$

$$+\frac{e_1e_2}{r}+\frac{e_1e_2}{2m_1m_2c^2r}\left[p^2+(\mathbf{p}\cdot\mathbf{n})^2\right].$$

第九章　电磁波的輻射

§9-1. 电荷体系在远处所产生的場

我們考虑一个运动电荷体系在与該体系相距甚远之处（就是距离比該体系的綫度大得多的地方）所产生的場。在这里，我們又从推迟势的表示式子

$$\varphi=\int\frac{1}{R}\rho_{t-R/c}\,dV,\ \mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{1}{R}\mathbf{j}_{t-R/c}\,dV$$

出發。

我們选擇坐标原点 O 在电荷体系內的任意一点。我們用 $\mathbf{R}_0$ 代表从 O 点到 P 点的矢徑量，P 点就是我們求場的点，并且用 $\mathbf{n}$ 表示在这个方向的單位矢量。設电荷 $de=\rho dV$ 的矢徑为 $\mathbf{r}$，而从 de 到 P 点的矢徑为 $\mathbf{R}$。显然，$\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$, $R=|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|$。当在体积上积分时，$\varphi$ 和 $\mathbf{A}$ 中的 $\mathbf{R}_0$ 保持不变。

在与电荷体系相距甚远之处，$\mathbf{R}_0\gg\mathbf{r}$。因此，我們可以将函数 $R=|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|$ 展开为 $\mathbf{r}$ 的冪級数，并且只保留級数的第一項。从普遍公式

$$f(\mathbf{r})\cong f(0)+\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}\,f(0),$$

我們得到

$$R=R_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}.$$

我們将上式代入推迟势的表示式中。在被积分函数中的分母內，$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ 与 R_0 比較起来可以略去不計。然而在 $t-\frac{R}{c}$ 中，这种省略一般来說是不可以的；在这里，到底可否作这种省略，并不决定于 $\frac{R_0}{c}$ 与 $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$ 的相对値，而决定于 ρ 和 $\mathbf{j}$ 在时間 $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$ 內的变化多少。

因此，对于与电荷体系相距甚远之处的場的势，我們得到以下二式：

$$\varphi=\frac{1}{R_0}\int\rho_{t-R_0/c+\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}}dV, \tag{9-1}$$

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int\mathbf{j}_{t-R_0/c+\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}}dV. \tag{9-2}$$

在距离电荷体系甚远之处，場在一个不很大的空間区域內可以当作平面波。为此，距离不仅必須比体系的綫度大很多，而且还要比体系所产生的(也可以說所輻射的)电磁波的波長大很多。空間的这个区域我們称为輻射的"波区"。

在平面波內，場 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 彼此有关系式(6-13) $\mathbf{E}=\mathbf{H}\times\mathbf{n}$。既然 $\mathbf{H}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$，为了完全决定波区內的場，只須求出矢势 $\mathbf{A}$ 就够了。在平面波內，我們有 $\mathbf{H}=\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n}$[比較(6-12)]，式中，$\mathbf{A}$ 上面的一点表示对时間的微分[1]。因此，假如知道了 $\mathbf{A}$，我們就可以从公式[2]

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n},\quad \mathbf{E}=\frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} \tag{9-3}$$

求出 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$。

---

① 这个公式很容易通过直接計算来証明。我們将(9-2)写成 $\mathbf{A}=\frac{1}{R_0}\mathbf{f}(t')$，此处的 $\mathbf{f}(t')$ 是 $t'=t-R/c$ 的函数。对于 $\mathbf{H}$，我們有 $\mathbf{H}=\mathrm{rot}\frac{1}{R_0}\mathbf{f}(t')$。在微分 $\frac{1}{R_0}\mathbf{f}$ 时，我們可以将 $1/R_0$ 作为常数(因为在微分 $1/R_0$ 时，得到与 $1/R^2$ 成比例的項，这些項与 $1/R_0$ 的項相比較可以略去)，仅仅对包含在 t' 內的 R_0 微分。所以，$\mathbf{H}=1/R_0\,\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(t')$。对于一个仅是 t' 的函数的矢量，我們有

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{f}(t')=\nabla t'\times\frac{d\mathbf{f}}{dt'}=-\frac{1}{c}\,\mathbf{n}\times\frac{d\mathbf{f}}{dt'},$$

的关系$\left(\text{因为 }\nabla t'=-\frac{1}{c}\nabla R_0=-\frac{\mathbf{n}}{c}\right)$。最后，我們有

$$\mathbf{H}=\frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{f}}\times\mathbf{n}=\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{n},$$

这就是我們所要証明的。

② 在这里沒有应用公式 $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}$[見(6-12)]，因为这里的势 φ 和 $\mathbf{A}$ 不滿足我們在 § 6-2 中所加于它們的补助条件。

我們指出，远处的場与离开輻射体系的距离的一次方成反比。我們还应当指出，在(9-1)到(9-3)各式中的时間 t 都以組合时間 $t-\frac{R_0}{c}$ 的形式出现。

对于一个作任意运动的点电荷所产生的輻射，用李納特-魏西尔特势是便利的。在远处，我們可以用矢量 $\mathbf{R}_0$ 代替公式(8-17)中的矢徑 R（坐标的原点选擇在电荷运动發生的有限区域內的任意一点），而在决定 t' 的条件(8-13)內，必須使 $R=R_0-\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{n}$ [$\mathbf{r}_0(t)$ 是电荷的矢徑]。因此，

$$\mathbf{A}=\frac{e\mathbf{V}(t')}{cR_0\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}(t')}{c}\right)},\tag{9-4}$$

式中的 t' 决定于等式

$$t'-\frac{\mathbf{r}_0(t')}{c}\cdot\mathbf{n}=t-\frac{R_0}{c}.\tag{9-5}$$

电磁波的輻射，当然有能量的輻射伴隨着。能量通量是由坡印廷矢量来决定的；而对于平面波，它是

$$\mathbf{S}=c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

輻射到立体角元 do 之內的輻射强度 dI 被定义为在單位时間內經过球面面元 df 的能量，而 $df=R_0^2do$，球的心在原点，半徑为 R_0。这个量显然等于能量通量密度 S 乘以 df，即

$$dI=c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2do.\tag{9-6}$$

既然場 H 与 R_0 成反比，那么我們可以看出，在單位时間內这个体系輻射到立体角元 do 內的能量对于所有的距离都是一样的（当 $t-\frac{R_0}{c}$ 的值对于它們有一样的值时）。这也当然必須如此，因为从体系輻射出来的能量以光速 c 向四周散开，在任何地方既不堆积，也不消失。

我們来求体系輻射出来的波的場的光譜分解公式。这些公式可以直接从 §8-3 中的各公式求出。将 $R=R_0-\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ 代入 (8-24) 式[在(8-24)内的被积分函数的分母中，我們可以令 $R=R_0$]，我們便得到矢势的傅里叶分量

$$\mathbf{A}_\omega=\frac{e^{ikR_0}}{cR_0}\int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dV \tag{9-7}$$

(式中 $\mathbf{k}=k\mathbf{n}$)。利用公式(9-3)，从 $\mathbf{A}_\omega$ 可以求出分量 $\mathbf{H}_\omega$ 和 $\mathbf{E}_\omega$。分别用 $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ 代替 $\mathbf{H}, \mathbf{E}, \mathbf{A}$，再以 $e^{-i\omega t}$ 除之，則得

$$\mathbf{H}_\omega=i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\omega,\quad \mathbf{E}_\omega=\frac{ic}{\omega}(\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\omega)\times\mathbf{k}. \tag{9-8}$$

当研究輻射强度的光譜分布时，我們必須区别展开为傅里叶級数和展为傅里叶积分两种情形。对于伴着带电粒子的碰撞而产生的輻射，我們展开它为傅里叶积分。在这种情形下，我們感兴趣的量是在碰撞期間輻射的(也是碰撞粒子所損失的)总能量。假設 $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}$ 是在碰撞期間以波的形式(波的頻率在間隔 $d\omega$ 之內)輻射到立体角元 do 內的能量。按照普遍公式(6-40)，总輻射在頻率間隔 $d\omega$ 內的部分可以从强度的一般公式求得，不过要用傅里叶分量的平方模乘之以 4π 来代替場的平方。因此我們有[比較(9-6)]

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}=c|\mathbf{H}_\omega|^2R_0^2\,do\,d\omega. \tag{9-9}$$

假如电荷作有限的周期性运动，那么，輻射場就应当展开为傅里叶級数。按照普遍公式(6-36)，傅里叶級数展开式中各个分量的强度可以从强度的寻常公式得之，不过要用傅里叶分量乘以 2 来代替場。因此，頻率为 $\omega=n\omega_0=n\frac{2\pi}{T}$ 的輻射到立体角元 do 內的强度等于

$$dI_n=\frac{c}{2\pi}|\mathbf{H}_n|^2R_0^2do. \tag{9-10}$$

对于一个單独的点电荷(在外場中运动)所輻射的波的光譜分解,我們同样可以写

$$\mathbf{A}_\omega=\frac{e^{ikR_0}}{2\pi cR_0}\int_{-\infty}^{+\infty}e\mathbf{V}(t)e^{i[\omega t-\mathbf{kr}_0(t)]}dt, \tag{9-11}$$

此式可以从(8-30)式求得,正如(9-7)式可以从(9-2)式求得一样。既然 $\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$,那么 $\mathbf{V}dt=d\mathbf{r}_0$,这个公式也就可以写成沿着电荷軌道的綫积分:

$$\mathbf{A}_\omega=e\frac{e^{ikR_0}}{2\pi cR_0}\int e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)}d\mathbf{r}_0. \tag{9-12}$$

按照(9-8)式,磁場的傅里叶分量有如下的形式:

$$\mathbf{H}_\omega=e\frac{i\omega e^{ikR_0}}{2\pi c^2R_0}\int e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)}\mathbf{n}\times d\mathbf{r}_0. \tag{9-13}$$

公式(9-11 到 9-13)直接从輻射电荷的运动規律来决定場(展开为傅里叶积分)的傅里叶分量。

假如电荷在一个封閉軌道上作周期性运动,那么,就应当将場展开为傅里叶級数。傅里叶級数展开式的分量可以从(9-11 到 9-13)求得,不过要用 $\frac{1}{T}$ 代替各公式中的 $\frac{1}{2\pi}$,而且积分应該遍及运动的周期 T(見§6-6)。对于頻率为 $\omega=n\omega_0=n\cdot\frac{2\pi}{T}$ 的磁場的傅里叶分量,我們有

$$\mathbf{H}_n=e\frac{2\pi ine^{ikR_0}}{c^2T^2R_0}\int_0^T e^{i[n\omega_0t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0](t)}\mathbf{n}\times\mathbf{V}(t)dt=$$

$$=e\frac{2\pi ine^{ikR_0}}{c^2T^2R_0}\oint e^{i(n\omega_0t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0)}\mathbf{n}\times d\mathbf{r}_0. \tag{9-14}$$

在第二个积分中,积分遍及粒子的整个封閉軌道。

§9-2. 偶極輻射

在推迟势(9-1)和(9-2)的被积分函数中,时間 $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$ 是可以略

去的，假如电荷分布在这个时間內改变得很小的話。滿足这个要求的条件不难找到。設 T 为这样的时間的數量級，在这个时間內，体系中的电荷的分布有显著的改变。这个体系的輻射显然含有与 T 同数量級的周期$\left(\text{卽頻率与 } \frac{1}{T} \text{ 同数量級}\right)$。此外，我們用 a 来代表体系的綫度的量級。因此，时間 $\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{n}}{c}$ 将与 $\frac{a}{c}$ 同数量級。要这个体系內的电荷分布在这个时間內不發生显著的改变，那么，就必須有 $\frac{a}{c}\ll T$。但是，cT 正是輻射的波長。因此，$a\ll cT$ 可以写为

$$a\ll\lambda. \tag{9-15}$$

就是說，电荷体系的綫度应当比輻射波的波長小很多。

我們指出，从(9-7)式也可以得到这个条件(9-15)。在被积分函数中，$\mathbf{r}$ 所取的值是在一个与电荷体系的綫度同数量級的間隔內，因为在电荷体系以外 $\mathbf{j}$ 等于零。因此，指数 $i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ 是很小的．对于那些 $ka\ll 1$ 的波，可以略去它們．而这个条件与(9-15)是等价的。

假如 v 与电荷速度的大小同量級，注意到 $T\sim\frac{a}{v}$，从而 $\lambda\sim\frac{ca}{v}$，那么，这个条件还可以写成另一形式。从 $a\ll\lambda$，我們得到

$$v\ll c, \tag{9-16}$$

就是說电荷的速度，应当比光速小很多。

假設这个条件已被滿足，我們来研究与輻射体系相距甚远之处的輻射，所謂与体系相距甚远就是指的距离比波長大很多，因而在任何情形下，都比电荷体系的綫度大很多。正如我們在§9-1所指出的，在这样的距离上，場可以当作平面波，因此，在求場时，仅仅只計算矢势就够了。

在远处的場的矢势(9-2)現在有如下的形式：

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int\mathbf{j}_{t'}\,dV, \tag{9-17}$$

式中，$t'=t-\frac{R_0}{c}$。时間 t' 現在已經与积分变量无关了。将 $\mathbf{j}=\rho\mathbf{V}$ 代入，我們就可将(9-17)改写为

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}(\Sigma e\mathbf{V})$$

(求和应对体系的所有的电荷进行；为簡單起見，我們略去指标 t'，这个方程右边的所有的量都是取对 t' 瞬間的值)。但是

$$\Sigma e\mathbf{V}=\frac{d}{dt}\Sigma e\mathbf{r}=\dot{\mathbf{d}},$$

式中，$\mathbf{d}$ 是电荷体系的偶極矩。因此，

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}}. \tag{9-18}$$

利用公式(9-3)，我們求出磁場等于

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c^2R_0}\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}, \tag{9-19}$$

而电場則等于

$$\mathbf{E}=\frac{1}{c^2R_0}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}. \tag{9-20}$$

我們注意，在所考慮的近似情况下，輻射为电荷体系的偶極矩的二次导数所决定。这样的輻射称为偶極輻射。

既然 $\mathbf{d}=\Sigma e\mathbf{r}$，$\ddot{\mathbf{d}}=\Sigma e\dot{\mathbf{V}}$；所以电荷只有在它們作加速度运动时才能輻射。作匀速直綫运动的电荷不輻射。这也可以直接从相对性原理推出，因为作匀速直綫运动的电荷可以在某一个慣性参考系統中靜止，而一个靜止电荷显然不輻射。

将(9-19)代入(9-6)，我們得到偶極輻射的强度：

$$dI=\frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2do. \tag{9-21}$$

它就是在單位时間內电荷体系輻射到立体角元 do 內的能量。对全部立体角积分，就得到單位时間內从体系向各个方向輻射出来的总能量。为此，我們引用球坐标，其極軸沿着 $\ddot{\mathbf{d}}$。設在这些坐标中的矢量 $\mathbf{n}$ 的極角和方位角为 θ 和 φ；因此 θ 就是 $\ddot{\mathbf{d}}$ 和 $\mathbf{n}$ 所夹之角。

这时 $do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, 而(9-21)式則化为

$$dI = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

从 0 到 2π 对 φ 积分，再从 0 到 π 对 θ 积分，我們得到

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{9-22}$$

假如我們只有一个电荷在外場中运动，那么，$\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, 而 $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, 此处的 $\mathbf{w}$ 是电荷的加速度。因此，运动电荷的总輻射是

$$I = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \tag{9-23}$$

我們注意，在由粒子所組成的体系中，假如所有粒子的荷質比都是相同的，就不会有輻射（偶極輻射）。实际上，对于这样的体系，偶極矩为

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{常数} \cdot \sum m\mathbf{r},$$

此处的常数是所有电荷共同的荷質比。但是 $\Sigma m\mathbf{r} = \mathbf{R}\Sigma m$, 此处的 $\mathbf{R}$ 是体系的慣性中心的矢徑（記着所有的速度 $v \ll c$, 因此非相对論力学可以应用）。因此 $\ddot{\mathbf{d}}$ 与慣性中心的加速度成正比，然而这个加速度是零，因为慣性中心匀速地运动着。

最后我們写出偶極輻射的强度的光譜分解。对于伴着碰撞而产生的輻射，我們引入 $d\mathscr{E}_\omega$，它是在碰撞时間內以波的形式（波的頻率在間隔 $d\omega$ 內）輻射出去的能量（比較 § 9-1）。用傅里叶分量 $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ 代替(9-22)式中的 $\ddot{\mathbf{d}}$ 并乘以 4π 就可得到 $d\mathscr{E}_\omega$[比較公式(9-6)和(9-9)]:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8\pi}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}}_\omega)^2\, d\omega.$$

按照傅里叶分量的定义，我們有

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

由此得到 $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$. 因此，

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}_\omega|^2 d\omega. \tag{9-24}$$

对于作周期运动的粒子，我們用同样的方法得到以頻率 $\omega = n\omega_0$(比較 9-10)輻射的强度如下:

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3}|\mathbf{d}_n|^2. \tag{9-25}$$

§9-3. 碰撞輻射

在研究碰撞輻射問題时，我們很少对于两个沿着一定軌道运动的粒子因碰撞而产生的輻射發生兴趣。通常我們必須考虑彼此平行移动着的整个粒子流的散射。我們的問題就是求出屬于每單位粒子流密度的总輻射。

假如粒子流密度等于 1(即在單位时間內通过粒子流單位横截面积有一个粒子)，那么，粒子流中"瞄准距离"[①] 在 ρ 和 $\rho+d\rho$ 之間的粒子等于 $2\pi\rho\, d\rho$(即以 ρ 和 $\rho+d\rho$ 为半徑的两个圓之間的环的面积)。因此所要求的总輻射就可以用 $2\pi\rho\, d\rho$ 乘一个粒子(具有瞄准距离 ρ)的总輻射 $\Delta\mathscr{E}$, 再对 ρ 从 0 到 ∞ 积分求得。如此求得的量将有能量乘面积的量綱。我們称它为有效輻射(同散射的有效截面相似)，並以 κ 代表之:

$$\kappa = \int_0^\infty \Delta\mathscr{E} \cdot 2\pi\rho\, d\rho. \tag{9-26}$$

用完全类似的方法，我們可以定义在一个一定的立体角元 do 內和在一个一定的頻率間隔 $d\omega$ 內的有效輻射等等[②]。

---

① "瞄准距离"就是碰撞的粒子假若沿直綫运动相互能够接近的距离。

② 假如被积分的式子与粒子的偶極矩在粒子流的横截面上的投影的定向角有关，那么，首先我們必須在这个平面上对于所有方向求平均值，只有这样作以后才能乘以 $2\pi\rho d\rho$ 然后再积分。

現在我們來求輻射沿各个方向的分布的一般公式，这个輻射是在中心对称場对粒子流發生散射时产生的，这里我們假設輻射是偶極輻射。

被散射的粒子流中的單个粒子在每一瞬間的輻射强度为(9-21)式所决定，在这个式子内的 $\mathbf{d}$ 是粒子对于散射中心的偶極矩[①]。首先，我們将此式对于矢量 $\ddot{\mathbf{d}}$ 在与粒子流方向相垂直的平面内的所有方向求平均值。既然 $(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2=\ddot{\mathbf{d}}^2-(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{d}})^2$，那么，求平均值时仅仅影响 $(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{d}})^2$。因为散射的場是中心对称的，而入射粒子流都是平行的，所以散射以及輻射具有对通过中心而又平行于粒子流的軸的对称性。我們选定这个軸作为 X 軸。从对称性的考虑可以看出，乘积 $\ddot{d}_x\ddot{d}_y$、$\ddot{d}_x\ddot{d}_z$，$\ddot{d}_y\ddot{d}_z$ 在求平均值时給出零，而 $\ddot{d}_y^2$ 和 $\ddot{d}_z^2$ 的平均值彼此相等，显然

$$\overline{\ddot{d}_y^2}=\overline{\ddot{d}_z^2}=\frac{1}{2}[(\ddot{\mathbf{d}})^2-\ddot{\mathbf{d}}_x^2].$$

注意到这些，我們就不难求得

$$\overline{(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})^2}=\frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2+\ddot{d}_x^2)+\frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2-3\ddot{\mathbf{d}}_x^2)\cos^2\theta,$$

式中，θ 是輻射方向 $\mathbf{n}$ 与 X 軸的夹角。

将强度对时間和对所有瞄准距离积分，我們就得到确定有效輻射作为輻射方向的函数的最后公式

$$d\kappa_n=\frac{d\mathrm{o}}{4\pi c^3}\left[A+B\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right],\tag{9-27}$$

式中，

$$A=\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\mathbf{d}}^2\,dt\,2\pi\rho\,d\rho,\quad B=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2-3\ddot{d}_x^2)dt\,2\pi\rho\,d\rho\tag{9-28}$$

① 实际上，通常我們所説的是指两个粒子——散射的粒子和被散射粒子——相对他們的公共的慣性中心的偶極矩。

(9-27)式的第二项被写成了使它对 do 的积分为零的形式。

伴着散射而产生的輻射强度可以分成两部分，一部分輻射的極化是在經过 X 軸和方向 $\mathbf{n}$ 的平面内(我們选擇这个平面为 XY 平面)，另一部分輻射的極化是在与这个平面垂直的平面内。电場矢量与下面的矢量的方向相同：

$$(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{d}})-\ddot{\mathbf{d}}$$

[見(9-20)式]。这个矢量在与 XY 平面垂直的方向上的分量是 $-\ddot{d}_z$，而它在 XY 平面内的投影是 $\sin\theta\,\ddot{d}_x-\cos\theta\,\ddot{d}_y$。将 $\mathbf{E}$ 平方，再对矢量 $\mathbf{d}$ 在 YZ 平面内的所有方向求平均值，我們首先看到，場在 XY 平面上的投影同它在与 XY 平面垂直的平面上的投影之积为零。这就說明，輻射强度实际上可以用两个独立部分之和来表示，这两部分就是極化在两个相互垂直的平面内的輻射强度。

电矢量在 XY 平面内的輻射强度为平均平方 $\overline{\ddot{d}_z^2}=\frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2-\ddot{\mathbf{d}}_x^2)$ 所决定。对于有效輻射的相应部分，我們得到

$$d\kappa_{\mathbf{n}}^{\parallel}=\frac{do}{4\pi c^3}\,\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2-\ddot{d}_x^2)dt\,2\pi\rho\,d\rho. \qquad (9\text{-}29)$$

我們注意，輻射的这一部分是各向同性的。我們不必要写出电場矢量在垂直于粒子流的軸又垂直于矢量 $\mathbf{n}$ 的平面内的有效輻射表示式，因为，显然 $d\kappa_{\mathbf{n}}^{\parallel}+d\kappa_{\mathbf{n}}^{\perp}=d\kappa_{\mathbf{n}}$。

用相似的方法，我們可以求出在一个一定頻率間隔 $d\omega$ 内的有效輻射的角分布公式。略去重复的討論，完全与上面相似，我們写出最后的表示式

$$d\kappa_{\mathbf{n},\omega}=\frac{do\,d\omega}{c^3}\left[A(\omega)+B(\omega)\frac{3\cos^2\theta-1}{2}\right], \qquad (9\text{-}30)$$

式中，

$$A(\omega)=\frac{2\omega^4}{3}\int\limits_0^{\infty}\mathbf{d}_\omega^2\,2\pi\rho\,d\rho,\quad B(\omega)=\frac{\omega^4}{3}\int\limits_0^{\infty}(\mathbf{d}_\omega^2-d_{x\omega}^2)2\pi\rho\,d\rho. \qquad (9\text{-}31)$$

其次，我們再来推导关于碰撞輻射的光譜分解中的这一部分的一些公式，在这部分中的頻率滿足条件

$$\omega\tau \ll 1, \tag{9-32}$$

式中 τ 是碰撞时間的数量級。在积分

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t}\,dt$$

中，輻射場 H，只有在与 τ 同数量級的时間間隔内，才与零有显著的差別。因此，按照条件(9-32)，我們可以假設在被积分函数内 $\omega t \ll 1$，从而就可以使 $e^{i\omega t}$ 等于 1；于是，

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}\,dt.$$

将(9-3)式 $\mathbf{H} = \frac{1}{r}\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}$ 代入上式，并对时間积分，則得到

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{2\pi c}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n}, \tag{9-33}$$

式中，$\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ 是碰撞粒子在碰撞所产生的場的矢势的变化。

将(9-33)代入(9-9)式，我們便得到碰撞总輻射。这里，我們只写出对所有方向的积分的結果[积分的进行正如由(9-21)推导(9-22)的方法完全一样]:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2}{3\pi c}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)^2 R_0^2\,d\omega. \tag{9-34}$$

我們看出，对于低頻率，輻射与頻率无关，就是說，当 $\omega \to 0$ 时，$\frac{d\mathscr{E}_\omega}{d\omega}$ 趋近于一个常数極限①。

---

① 对瞄准距离积分，我們可以得到粒子流散射时的有效輻射的相似的結果，然而我們要記着，这个結果对于碰撞粒子在庫侖相互作用情况下的有效輻射是不正确的，因为对 ρ 的积分在 ρ 很大时是(对数)發散的。在下一节中可以看出，在这种情形下，低頻率的有效輻射与頻率的对数有关，而不是保持不变。

假如碰撞粒子的速度比光速小很多，并且只考慮偶極子輻射，那么，利用(9-18)式，得到

$$d\mathscr{E}_{\omega}=\frac{2}{3\pi c^3}[\Sigma e(\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1)]^2\,d\omega, \qquad (9\text{-}35)$$

式中 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 是粒子在碰撞前和碰撞后的速度，求和是对所有碰撞粒子进行。假如粒子的速度可以与光速相比拟，那么，在(9-34)式中，我們必須用公式(9-4)中的場的势。

§9-4. 庫侖相互作用的輻射

为了参考的目的，我們在这一节內列举一系列有关两个带电粒子体系的偶極輻射公式；这里，我們假設粒子的速度比光速小很多。

我們对这个体系作为一个整体的匀速运动(即体系慣性中心的运动)沒有兴趣，因为它并不引起輻射；因此我們只須研究粒子的相对运动。我們选定慣性中心为坐标原点，那么，体系的偶極矩 $\mathbf{d}=e_1\mathbf{r}_1+e_2\mathbf{r}_2$ 可以写成

$$\mathbf{d}=\frac{e_1m_2-e_2m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \qquad (9\text{-}36)$$

式中，指标 1 和 2 分別屬于两个粒子，而 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ 則是两粒子之間的矢徑。

我們从两个按照庫侖定律互相吸引着的粒子在作橢圓运动时所产生的輻射开始。从力学我們知道[①]，这种运动可以用一个質量为 $\mu=\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$ 的粒子(μ 为粒子 m_1 和 m_2 的折合質量)在橢圓上的运动来説明，橢圓的極坐标方程是

$$1-\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}, \qquad (9\text{-}37)$$

---

① 参看，例如，本教程第一卷"力学"，§13。

此处的長半徑 a 和离心率 ε 是

$$a=\frac{\alpha}{2|\mathscr{E}|},\qquad \varepsilon=\sqrt{1-\frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}.\tag{9-38}$$

式中，$\mathscr{E}$ 是粒子的总能量(运动在有限范圍內时，总能量为負)。$M=\mu r^2\dot{\varphi}$ 是冲量矩，而 α 是庫侖定律中的常数($\alpha=|e_1e_2|$)。坐标与时間的关系可以用参数方程表示如下:

$$r=a(1-\varepsilon\cos\xi),\quad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\xi-\varepsilon\sin\xi).\tag{9-39}$$

当参数 ξ 从 0 变到 2π 时，粒子在椭圓上走一周; 运动的周期是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

現在我們来求偶極矩的傅里叶分量。因为运动是周期性的，所以这郎是求傅里叶級数的展开式。旣然偶極矩与矢徑 $\mathbf{r}$ 成比例，那么这个問題就可化为求坐标 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ 的傅里叶分量。按照(9-37)到(9-39)各式，x 和 y 与时間的关系就为参数方程

$$x=a(\varepsilon-\cos\xi),\quad y=a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\xi,$$
$$\omega_0t=\xi-\varepsilon\sin\xi\tag{9-40}$$

所决定，这里，我們引入了频率 $\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\mu a^3}}$。

利用 $\dot{x}_n=-i\omega_0nx_n$, $\dot{y}_n=-i\omega_0ny_n$, 計算速度的傅里叶分量，这比求坐标的傅里叶分量更便利些。我們有

$$x_n=\frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0n}=\frac{i}{\omega_0n}\frac{1}{T}\int_0^T e^{i\omega_0nt}\dot{x}\,dt.$$

但是 $\dot{x}\,dt=dx=a\sin\xi\,d\xi$, 因此，将对 t 的积分变为对 ξ 的积分，我們就有

$$x_n=\frac{ia}{2\pi n}\int_0^{2\pi}e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\sin\xi\,d\xi.$$

同样，我們可求得

$$y_n=\frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n}\int_0^{2\pi}e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}\cos\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n\varepsilon}\int_0^{2\pi}e^{in(\xi-\varepsilon\sin\xi)}d\xi$$

(在从第一个积分变到第二个积分时，我們在被积分函数中写了 $\cos\xi=\left(\cos\xi-\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{\varepsilon}$；这时，出現了 $\cos\xi-\frac{1}{\varepsilon}$ 的积分，而它恒等于零)。最后利用貝塞耳函数的理論，我們有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n\xi-x\sin\xi)}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\xi-x\sin\xi)d\xi=J_n(x),$$

式中，$J_n(x)$ 是整数 n 阶的貝塞耳函数。結果得到所求的傅里叶分量的如下的表示式：

$$x_n=\frac{a}{n}J_n'(n\varepsilon),\quad y_n=\frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon}J_n(n\varepsilon) \tag{9-41}$$

(貝塞耳函数上面的一撇表示对函数的独立变数的微分)。

輻射的單色分量强度的表示式可以将 x_ω, y_ω 代入(9-25)中得之：

$$I_n=\frac{4\omega_0^4n^2a^2}{3c^3}\left[J_n'^2(n\varepsilon)+\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}J_n^2(n\varepsilon)\right]\left(\frac{e_1m_2-e_2m_1}{m_1+m_2}\right)^2. \tag{9-42}$$

下面我們写出在 n 很大的情况下的强度的漸近式[①]：

---

① 在求(9-43)和(9-42)时，我們必須用貝塞耳函数理論中熟知的漸近公式

$$J_n(n\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]^n$$

此公式对于 $n(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\gg1$ 有效。我們指出，B. A. 福克得到了一个求 $J_n(n\varepsilon)$ (对于大的 n 和任意的 ε)的更普遍的公式(ДАН, 1, 97, 1934)。

$$I_n=\frac{2\omega_0^4a^2n}{3\pi c^3\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{e_1m_2-e_2m_1}{m_1+m_2}\right)^2\left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]^{2n}. \tag{9-43}$$

假如 ε 不太接近于 1，这个公式就可以应用，就是說必須滿足下列条件：

$$n(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}\gg 1.$$

以下，我們考慮两个互相吸引的带电粒子的碰撞。这两个粒子的相对运动，可以用一个以質量为 μ 的粒子在双曲綫上的运动来描写：

$$1-\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}, \tag{9-44}$$

式中，
$$a=\frac{\alpha}{2\mathscr{E}},\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{\mu\alpha^2}} \tag{9-45}$$

(現在 $\mathscr{E}>0$)。r 与时間的关系为下面的参数方程所决定：

$$r=a(\varepsilon\operatorname{ch}\xi-1),\qquad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon\operatorname{sh}\xi-\xi), \tag{9-46}$$

此处的参数 ξ 可取 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之間的一切値。对于坐标 x, y，我們有

$$x=a(\operatorname{ch}\xi-\varepsilon),\quad y=a\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{sh}\xi. \tag{9-47}$$

傅里叶分量的計算(我們現在所指的是展开为傅里叶积分的展开式)可以照上面的方法完全一样地进行。結果得到

$$x_\omega=-\frac{a}{2\omega}H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right),\quad y_\omega=-\frac{a\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2\omega\varepsilon}H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\varepsilon\right). \tag{9-48}$$

式中，$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}$ 是第一类第 $\frac{i\omega}{\omega_0}$ 阶的韓凱尔函数，我們引入了符号 $\omega_0=\sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}}$ (ω_0 現在当然不是运动的频率)。在計算中，我們还引用了貝塞耳函数理論中的公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu\xi - ix\,\mathrm{sh}\xi}\,d\xi = i\pi H_{\nu}^{(1)}(ix). \tag{9-49}$$

将所得到的式子代入(9-9)，我們便得到頻率在間隔$d\omega$內的碰撞总輻射①

$$d\mathscr{E}_{\omega}=\frac{2\pi\omega^{2}a^{2}}{3c^{3}}\left(\frac{e_{1}m_{2}-e_{2}m_{1}}{m_{1}+m_{2}}\right)^{2}\left\{-\frac{\varepsilon^{2}-1}{\varepsilon^{2}}\left[H_{\frac{i\omega}{\omega_{0}}}^{(1)}\left(\frac{i\omega}{\omega_{0}}\varepsilon\right)\right]^{2}+\right.$$
$$\left.+\left[H_{\frac{i\omega}{\omega_{0}}}^{(1)\prime}\left(\frac{i\omega}{\omega_{0}}\varepsilon\right)\right]^{2}\right\}d\omega. \tag{9-50}$$

我們所关心的是描述在平行运动粒子流散射时之輻射的特征的"有效輻射"(見上一节)。为了計算它，我們用$2\pi\rho\,d\rho$乘$d\mathscr{E}_{\omega}$，再对ρ从零到无穷大积分。利用$2\pi\rho\,d\rho=2\pi a^{2}\varepsilon\,d\varepsilon$ (这个关系从定义(9-44)得来，在(9-44)中，冲量矩M和能量$\mathscr{E}$与瞄准距离ρ及粒子在无穷远处的速度v_0的关系是：$M=\mu\rho v_{0}$, $\mathscr{E}=\mu\left(\frac{v_{0}^{2}}{2}\right)$)，我們将对$\rho$的积分化为对$\varepsilon$(在1与$\infty$的范圍中)的积分。最后的积分可以直接利用公式

$$z\left[Z_{p}^{\prime 2}+\left(\frac{p^{2}}{z^{2}}-1\right)Z_{p}^{2}\right]=\frac{d}{dz}(zZ_{p}Z_{p}^{\prime}),$$

式中，$Z_p(z)$是p阶貝塞耳方程的一个任意解②。記着当$\varepsilon\to\infty$时，韓凱尔函数$H_{\frac{i\omega}{\omega_{0}}}^{(1)}\left(\frac{i\omega}{\omega_{0}}\varepsilon\right)$变为零，結果我們便可得到下面的公式：

$$d\kappa_{\omega}=\frac{4\pi^{2}ia^{2}\omega}{3c^{3}}\sqrt{\frac{\alpha a}{\mu}}\left(\frac{e_{1}m_{2}-e_{2}m_{1}}{m_{1}+m_{2}}\right)^{2}H_{\frac{i\omega}{\omega_{0}}}^{(1)}\left(\frac{i\omega}{\omega_{0}}\right)H_{\frac{i\omega}{\omega_{0}}}^{(1)\prime}\left(\frac{i\omega}{\omega_{0}}\right). \tag{9-51}$$

① 在求模的平方时，必須記着y_{ω}是純虛数，而x_{ω}是純实数。

② 这个公式是貝塞耳方程

$$Z''+\frac{1}{z}Z'+\left(1-\frac{p^{2}}{z^{2}}\right)Z=0$$

的直接結果。

現在讓我們考慮低頻和高頻两种極限情形。在积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i\omega}{\omega_0}(\xi-\operatorname{sh}\xi)}d\xi = i\pi H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \tag{9-52}$$

(韓凱尔函数的定义)中，积分变量 ξ 的唯一重要的范圍是指数在其中与 1 同数量級的范圍。因此，对于低頻率($\omega \ll \omega_0$)，仅仅大 ξ 的区域是重要的。但是对于大的 ξ，我們有 $\operatorname{sh}\xi \gg \xi$。因此，近似地，

$$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\omega}{\omega_0}\operatorname{sh}\xi}d\xi = H_0^{(1)}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right).$$

同理，我們可求得

$$H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong H_0^{(1)\prime}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right).$$

最后，利用貝塞耳函数理論中的近似式(对于小的 x)

$$iH_0^{(1)}(ix) \cong \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma = e^C$，式中，C 是欧勒常数，$\gamma = 1.7807\cdots$)，我們得到低頻率有效輻射的如下表示式：

$$d\kappa_\omega = \frac{16e_1^2e_2^2}{3v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ln\left(\frac{2v_0^3 m_1 m_2}{\gamma\omega|e_1e_2|(m_1+m_2)}\right)d\omega$$

$$\left(\omega \ll \frac{\mu v_0^3}{|e_1e_2|}\right). \tag{9-53}$$

这个表示式依賴于頻率的对数。

对于高頻率($\omega \gg \omega_0$)，在积分(9-52)中，与前相反，小的 ξ 的区域是重要的。根据这个理由，我們展开被积分函数的指数为 ξ 的幂級数，并近似地得到

$$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right) \cong -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3}d\xi = -\frac{2i}{\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3}d\xi\right).$$

作代换 $\frac{i\omega}{6\omega_0}\xi^3=\eta$，上面的积分化为 Γ 函数，結果我們得到

$$H^{(1)}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)\cong-\frac{i}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6\omega_0}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

同理，我們得到

$$H^{(1)\prime}_{\frac{i\omega}{\omega_0}}\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6\omega_0}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

最后，再利用 Γ 函数理論中的熟知公式

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

对于高频率有效輻射，我們得到

$$d\kappa_\omega=\frac{16\pi e_1^2e_2^2}{3\sqrt{3}\,v_0^2c^3}\left(\frac{e^1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2d\omega,\quad\left(\omega\gg\frac{\mu v_0^3}{|e_1e_2|}\right),\qquad(9\text{-}54)$$

即得到一个与频率无关的表示式。

現在我們轉到伴着两个按照庫侖定律 $U=\frac{\alpha}{r}(\alpha>0)$ 而排斥的粒子互相碰撞而产生的輻射。运动發生在双曲綫

$$-1+\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}\qquad(9\text{-}55)$$

上，与时間的关系可用参数方程

$$x=a(\varepsilon+\operatorname{ch}\xi),\quad y=-a\sqrt{\varepsilon^2-1}\operatorname{sh}\xi,$$

$$t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon\operatorname{sh}\xi+\xi)\qquad(9\text{-}56)$$

来决定[a 和 ε 得自(9-45)式]。对于这种情形的所有計算直接可以化为与上面进行过的計算，因而这里就不再重复了。实际上，对于坐标 x 的傅里叶分量的积分

$$x_\omega=\frac{ia}{2\pi\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{i\omega}{\omega_0}(\varepsilon\operatorname{sh}\xi+\xi)}\operatorname{sh}\xi\,d\xi$$

在作代換 $\xi\to i\pi-\xi$ 后便可化为在互相吸引情形下的积分乘以 $e^{-\pi\frac{\omega}{\omega_0}}$；这对 y_ω 也同样成立。

因此，在相斥的情形中，傅里叶分量 x_ω, y_ω 的表示式与相吸的情形中的相应的表示式只相差一个因子 $e^{-\pi\frac{\omega}{\omega_0}}$。所以，在輻射的各公式中，唯一的变动是加上一个因子 $e^{-2\pi\frac{\omega}{\omega_0}}$。就特例言之，对于低頻率，我們得到上面的公式(9-53)(因为对于 $\omega\ll\omega_0$，$e^{-2\pi\frac{\omega}{\omega_0}}\cong 1$)。对于高頻率，有效輻射有下面的形式：

$$d\kappa_\omega=\frac{16\pi e_1^2e_2^2}{3\sqrt{3}v_0^2c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2e^{-\frac{2\pi\omega e_1e_2}{\mu v_0^3}}d\omega,$$

$$\left(\omega\gg\frac{\mu v_0^3}{e_1e_2}\right). \quad (9-57)$$

它随着頻率的增加而按指数規律下降。

習　題

1. 求两个互相吸引的質点在作橢圓运动时的平均总輻射。

解：从偶极矩的表示式(9-36)，我們得到輻射的总强度

$$I=\frac{2}{3c^3}\left(\frac{e_1m_2-e_2m_1}{m_1+m_2}\right)^2\ddot{r}^2.$$

按照运动方程，$\mu\ddot{r}=\frac{|e_1e_2|}{r^3}r$（$\mu$ 是折合質量），所以

$$I=\frac{2e_1^2e_2^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{1}{r^4}.$$

按照軌道方程(9-37)我們用 φ 来表示 r，再利用等式 $dt=\mu r^2\varphi/M$，我們将对时間的积分变为对角的积分(从 0 到 2π)。結果，我們对于平均强度 $\bar{I}=\frac{1}{T}\int_0^T Idt$ 得到下面的式子：

$$\bar{I}=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\mu^{\frac{5}{2}}\frac{|e_1e_2|^3|\mathscr{E}|^{\frac{3}{2}}}{M^5}\left(3-\frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu e_1^2e_2^2}\right).$$

2. 求两个带电粒子的碰撞总輻射 $\Delta\mathscr{E}$。

解：在相吸的情形下，軌道是双曲綫(9-44)，而在相斥的情形下，軌道是(9-55)。双曲綫的漸近綫与它的軸所夾的角是 φ_0，φ_0 由 $\cos\varphi_0=1/\varepsilon$ 来决定，而粒子的偏轉

角(在慣性中心是靜止的坐标系統中)是$\chi=\pi-2\varphi_0$。計算方法照習題1进行(积分限是$-\varphi_0$和$+\varphi_0$)。对于相吸的情形,我們得到

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3|e_1e_2|}\tan^3\frac{\chi}{2}\left\{(\pi+\chi)\left(1+3\tan^2\frac{\chi}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+6\tan\frac{\chi}{2}\right\}\cdot\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2,$$

而对于相斥的情形我們得到

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3 e_1e_2}\tan^3\frac{\chi}{2}\left\{(\pi-\chi)\left(1+3\tan^2\frac{\chi}{2}\right)-6\tan\frac{\chi}{2}\right\}\cdot\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

在两种情形下,χ都是正角并由方程$\cot\frac{\chi}{2}=\mu v_0^2\rho/|e_1e_2|$来决定($\rho$是"瞄准距离")。

因此对于两个相斥的电荷的"正"碰撞($\rho=0,\chi=\pi$),我們得到

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3 e_1e_2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

3. 求一粒子流(电荷为e_1,質量为m_1)被一个电荷e_2(質量为m_2)散射时的总有效輻射(电荷e_1和e_2有相同的符号)。

解: 所求的量是

$$\kappa=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}I\,dt\,2\pi\rho\,d\rho=\frac{2e_1^2e_2^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 2\pi\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r^4}dt\,\rho\,d\rho.$$

将$dt=dr/v_r$代入,我們将对时間的积分化为沿电荷軌道的积分,此处的徑向速度$v_r=\dot{r}$可以用r表示如下:

$$v_r=\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\mathscr{E}-\frac{M^2}{2\mu r^2}-U(r)\right]}=\sqrt{v_0^2-\frac{\rho^2v_0^2}{r^2}-\frac{2e_1e_2}{\mu r}}.$$

对r积分的范圍是从∞到r_0(r_0是离中心最近的距离,在这一点$v_r=0$),然后再从r_0到无穷远。如将积分次序互换(即先对ρ积分,然后再对r积分),对于积分的运算会便利一些。計算的結果是

$$\kappa=\frac{8\pi}{9c^3}\frac{e_1e_2m_1m_2}{(m_1+m_2)}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

4. 設有一个电荷从另一个电荷的旁边經过,假設电荷的速度是这样大(虽然比起光速仍然是很小的),以致它的軌道与直綫的偏差可以認为很小,求由此所产生的总輻射的角分布。

解: 假如动能$\mu v^2/2$比势能大很多[势能与a/ρ($\mu v^2\gg a/\rho$)同数量級],那么,偏轉角就小了。我們选定运动的方向为X軸的方向,而原点仍选在質心。在一級近似中,軌道可以由$x=vt,\ y=\rho$給出。在高一級的近似中,运动方程給出

$$\mu\ddot{x}=\frac{a}{r^2}\frac{x}{r}=\frac{avt}{r^3},\qquad \mu\ddot{y}=\frac{a}{r^2}\frac{y}{r}=\frac{a\rho}{r^3}$$

这里对于 r 我們可以写 $r=\sqrt{\rho^2+v^2t^2}$。利用这些式子，将公式(9-21)对时間从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，我們求得立体角 do 内的总輻射

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}=\frac{a^2}{32vc^3\rho^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2(4-3n_x^2-n_y^2)do.$$

(n_x, n_y 是單位矢量 $\mathbf{n}$ 在 do 方向的分量)。

§ 9-5. 四極輻射和磁偶極輻射

現在我們来研究由矢势(9-2)的展开式以后几項所决定的輻射。假如电荷体系的綫度比波長小很多，那么，这些項一般也比产生偶極輻射的第一項小得多。但是在电荷体系的偶極矩为零的情形下，它們就很重要了，因为偶極輻射不發生。

将(9-2)展开，即将

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}}\,dV$$

展开为 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c$ 的冪級数，我們得到(准确到一阶項)

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\,dV+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})\mathbf{j}_{t'}\,dV.$$

将 $\mathbf{j}=\rho\mathbf{V}$ 代入，我們改写上式为

$$\mathbf{A}=\frac{\Sigma e\mathbf{V}'}{cR_0}+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\Sigma e\mathbf{V}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}).\tag{9-58}$$

(从現在起，我們象在 § 9-2 一样略去指标 t')。

在右边的第二个和中，我們可以写

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n})=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+\frac{1}{2}\mathbf{V}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})-\frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+\frac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})\times\mathbf{n}.$$

于是，我們求得 $\mathbf{A}$ 的表示式

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Sigma e\,\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})+\frac{1}{cR_0}(\dot{\mathfrak{m}}\times\mathbf{n})$$

式中，$\mathbf{d}$ 是这个体系的偶極矩，而 $\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\Sigma e\mathbf{r}\times\mathbf{V}$ 則是体系的磁矩。

为了作更进一步的变换，我們应注意，将与 n 成比例的任意矢量加到 A 上，并不改变場，因为按照公式(9-3)，H 和 E 并不改变。

根据这个道理，我們可以将矢量 $-\frac{\mathbf{n}}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Sigma er^2$ 加到上面所得到的 A 的表示式中，这样，我們就得到

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Sigma e[3\mathbf{r}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{n}r^2]+\frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}.$$

但是，在符号 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 后面的表示式正是矢量 n 和四極矩張量 $D_{\alpha\beta}=\Sigma e(3x_\alpha x_\beta-\delta_{\alpha\beta}r^2)$的积 $\mathbf{n}D_{\alpha\beta}$（见 § 5-6）。引入矢量 D，其分量为 $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$，我們便得到矢势的最后表示式

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}}+\frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}. \tag{9-59}$$

知道了 A，我們現在就可以確定輻射場 H 和 E。利用一般公式(9-3)，我們便可得到下面的式子：

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c^2R_0}\left\{\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}+\frac{1}{6c}\dddot{\mathbf{D}}\times\mathbf{n}+(\ddot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}\right\},$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{c^2R_0}\left\{(\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}+\frac{1}{6c}(\dddot{\mathbf{D}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}+[\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{m}}]\right\}. \tag{9-60}$$

立体角 do 内的輻射强度 dI 可以用一般公式(9-6)，来决定。現在我們来計算总輻射，就是这个体系在單位时間内輻射到各个方向的能量。为此，我們按所有 n 的方向求 dI 的平均值；总輻射显然就等于这个平均值乘以 4π。在求磁場平方的平均値时，在 H 内的三項中，任意两項的乘积都是零，因而只剩下每一項的平方平均值。經过簡單的計算[1] 就可得到下面的 I 的表示式：

---

[1] 我們介紹一个便利方法来求一个單位矢量的分量的积的平均値。因为 n 是一个單位矢量，$\overline{n_\alpha n_\beta}$ 是一个对称張量，只可以用單位張量 $\delta_{\alpha\beta}$ 来表示，即 $\overline{n_\alpha n_\beta}=a\delta_{\alpha\beta}$；对指标 α，β 进行縮并，記着 $n_\alpha^2=1$，我們就可得到 $a=1/3$。

对于四个分量的积的平均値，我們同样可以写

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}=a(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}),$$

（記着 $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$ 对所有四个指标的对称性）。对于成对的指标 α，β 和 γ，δ 两对指标进行縮并，我們得到 $a=1/15$。

$$I=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2+\frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}+\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathfrak{m}}^2. \qquad (9\text{-}61)$$

因此，总輻射包含三个独立部分；它們分别称为偶極輻射，四極輻射和磁偶極輻射。

我們注意，磁偶極輻射实际上在許多情况下是不存在的。例如，在一个体系中，假如所有运动粒子的荷質比都一样，磁偶極輻射就不存在（在这种情况下，偶極輻射也不存在，我們在§ 9-2 中已經証明过了）。事实上，在这样的体系中，磁矩与机械冲量矩成比例（見§ 5-9），因为冲量矩是守恒的，所以 $\dot{\mathfrak{m}}=0$。同理，磁偶極輻射对于任何只包含两个粒子的体系也是不存在的（见§ 5-9 的習題），但是，在这种情形下，关于偶極子輻射，我們得不到任何結論。

習　　題

一带电粒子流被一些同它們完全一样的粒子所散射，求其总有效輻射。

解： 当完全一样的粒子碰撞时，偶極輻射（磁偶極輻射亦然）不存在，因此我們必須計算四極輻射。两个完全一样的粒子所构成的体系的四極矩張量（相对于質心）是

$$D_{\alpha\beta}=\frac{e}{2}(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}),$$

式中，x_α 是两个粒子之間的矢徑 $\mathbf{r}$ 的分量。我們将上式代入輻射强度的公式 $I=\frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}$ 内。x_α 对时間的第一、第二，第三阶导数可以用粒子的相对速度 v_α 表示如下：

$$\dot{x}_\alpha=v_\alpha,\ \mu\ddot{x}_\alpha=\frac{m}{2}\ddot{x}_\alpha=\frac{e^2x_\alpha}{r^3},\ \frac{m}{2}\dddot{x}_\alpha=e^2\frac{v_\alpha r-3x_\alpha v_r}{r^4},$$

式中，$v_r=\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}/r$ 是速度的矢徑（第二个等式是电荷的运动方程，第三个可由微分第二个得之）。計算得出下面的强度的表示式：

$$I=\frac{4e^6}{5m^2c^5}\frac{1}{r^4}(v^2+11v_\varphi).$$

$(v^2=v_r^2+v_\varphi^2)$；v 和 v_φ 与 r 的关系是

$$v^2=v_0^2-\frac{4e^2}{mr},\qquad v_\varphi=\frac{\rho v_0}{r}.$$

我們用对 r 的积分代替对时間的积分，如在 §9-4 中的習題 3 一样，即写

$$dt=\frac{dr}{v_r}=\frac{dr}{\sqrt{v_0^2-\frac{\rho^2 v_0^2}{r^2}-\frac{4e^2}{mr}}}.$$

在对于 ρ 和 r 的重积分中，我們首先对 ρ 积分，然后再对 r 积分。經过計算，結果我們得到：

$$\kappa=\frac{8\pi}{3}\frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

§9-6. 在近处的輻射場

偶極輻射的各公式是我們对于与輻射体系相距甚远之处的場求的，所謂甚远之处，即到輻射体系的距离比波長（特别是比輻射体系的綫度）大很多。在这一节中我們仍假設波長比体系的綫度大很多，可是我們要研究的場到体系的距离却是虽比体系的綫度大，但与波長同数量級。

矢势的公式(9-18)

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}} \tag{9-62}$$

仍然有效，因为在求这个公式的时候，我們只应用了 R_0 比輻射体系的綫度大很多这个事实。然而現在即使在小区域内場也不能当作平面波。因此，电場和磁場的公式(9-19)和(9-20)已經不能应用了，为了求出它們，就必須先求 $\mathbf{A}$ 和 φ。

利用加在两个势上的一般条件(8-3)

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

我們可以直接从矢量势的表示式求出标势的公式。将 (9-62) 代入，并对时間积分，我們便得到

$$\varphi=-\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{9-63}$$

积分常数(是坐标的任意函数)在这里被略去了．因为我們只对于势的变数部分感兴趣。我們記得，在公式(9-63)以及公式(9-62)

中，$\mathbf{d}$ 的值必須是在 $t'=t-\frac{R_0}{c}$ 瞬間的值①。

現在已經不难計算电場和磁場了。从联系 $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ 和势的寻常公式，我們得到

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \tag{9-64}$$

$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{d}}{R_0}-\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}. \tag{9-65}$$

注意到 $\frac{\mathbf{d}_{t'}}{R_0}$ $\left[\text{与任何坐标和时間的函数}\ \frac{1}{R_0}f\left(t-\frac{R_0}{c}\right)\text{一样}\right]$滿足达朗貝尔方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{d}}{R_0}\right)=\Delta\left(\frac{\mathbf{d}}{R_0}\right),$$

$\mathbf{E}$ 的表示式可以改写成另一形式。用熟知的矢量分析中的公式

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\Delta\mathbf{a},$$

我們便可求得

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{9-66}$$

用上面求得的結果可以决定在距离与波長同数量級之处的場。在所有这些公式中，不允許将 $\frac{1}{R_0}$ 从积分号內提到积分号外，因为包含 $\frac{1}{R_0^2}$ 的与包含 $\frac{1}{R_0}$ 的項之比正好与波長同 R_0 之比同数量級。

最后，我們来求場的傅里叶分量的公式。为了求 $\mathbf{H}_\omega$，我們用 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{d}$ 的單色分量 $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ 和 $\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$ 分别代替 (9-64) 式的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{d}$。然而我們必須記着，在方程(9-62)到(9-66)中的右边的各量都是指取 $t'=t-\frac{R_0}{c}$ 瞬間的值。因此我們必須用

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}=\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t+ikR_0}$$

① 有时我們引入所謂赫兹矢量，其定义为

$$\mathbf{Z}=-\frac{1}{R_0}\mathbf{d}\left(t-\frac{R_0}{c}\right).$$

这时，

$$\mathbf{A}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Z}},\quad \varphi=\operatorname{div}\mathbf{Z}.$$

代替 $\mathbf{d}$。代入后，再除以 $e^{-i\omega t}$，我們便得到

$$\mathbf{H}_\omega = -ik\,\mathrm{rot}\left(\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right)$$

或

$$\mathbf{H}_\omega = ik\,\mathbf{d}_\omega \times \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \tag{9-67}$$

同样，从(9-65)可得到

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega \cdot \nabla)\nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}. \tag{9-68}$$

習　　題

求近处的四極輻射和磁偶極輻射。

解：为簡單起見，假設偶極輻射总是不存在的，于是我們有（比較§9-5中所进行的計算）

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_{t-R/c} \frac{dV}{R} \cong -\frac{1}{c}\int (\mathbf{r}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{j}_{t-R_0/c}}{R_0}\,dV$$

（按照 $\mathbf{r}$ 的冪展开；$\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$）。与在§9-5中所作的不同，$1/R_0$ 现在不能从积分号内提到积分号外。我們将微分号提到积分号外，将公式改用張量符号表示：

$$A_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_k}\int \frac{x_k j_i}{R_0}\,dV.$$

（X_k 是矢徑 $\mathbf{R}_0$ 的分量）。将积分变为对电荷求和，我們求得

$$A_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{(\Sigma e v_i x_k)_{t'}}{R_0}.$$

用与§9-5中同样的方法，将此式分为四極部分和磁極部分。相应的标势可由矢势計算出来，如在§9-6中所作的一样。結果，对于四極輻射，我們得到

$$A_i = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_k}\frac{\dot{D}_{ik}}{R_0}, \quad \varphi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\frac{D_{ik}}{R_0},$$

对于磁偶極輻射，我們得到

$$\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\frac{\mathfrak{m}}{R_0}, \quad \varphi = 0.$$

（所有在右边的量，如平常一样，都是取 $t' = t - R_0/c$ 瞬間的值）。

§9-7. 快速运动电荷的輻射

現在我們来研究一个带电粒子，这个粒子运动的速度同光速比較起来并不算小。在求§9-2中的各公式时，我們假設了 $v \ll c$，因

而这些公式不能直接应用到目前所考虑的情形。但是，我們可以把粒子放在它在一給定瞬間为静止的那个参考系統中去研究。在这个参考系統中，所提到的这些公式当然是有效的(应該注意这个事实，即这样的做法只有在一个运动粒子的情况下才有可能；对于包含許多粒子的体系，显然不存在所有的粒子同时是靜止的参考系統)。

因此，在所指的参考系統中，这个粒子在时間 dt 内輻射出去的能量是

$$d\mathscr{E}=\frac{2e^2}{3c^3}w_0^2\,dt \tag{9-69}$$

[按照公式(9-23)]，式中的 w_0 是粒子在这个系統内的加速度。我們現在将这个式子改写为四度形式，这种形式可以应用到任何参考系統中。为此，我們要注意 $w_0^2=c^4w_k^2$，式中的 w_k 是粒子在任意参考系統中的四度加速度(見§1-7中的習題1)。此外，我們現在用"輻射四度冲量" $\frac{c}{i}dP_i$ 代替輻射能 $d\mathscr{E}$，因为能量 $\left(乘以 \frac{i}{c}\right)$ 是四度动量的时間分量；根据相似的理由，我們必須用 $\frac{dx_i}{ic}$ 来代替 dt。因此，我們求得

$$dP_i=\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2dx_i=\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2u_i\,ds, \tag{9-70}$$

式中，u_k 是粒子的四度速度。不难証明，在粒子在其中是靜止的参考系統中，这个方程的时間分量实际上给出(9-69)；而空間分量，对于單位时間内的輻射冲量，給出 $\frac{d\mathbf{P}}{dt}=0$(当 $v=0$ 时，u_i 的空間分量也是零)。将輻射冲量定义为冲量的通量密度在包圍粒子的曲面上的积分，就可以直接得出上面的結果；在 $v=0$ 的那个参考系統中，輻射为§9-2中的公式所決定，而沿向两个相反方向带走的冲量的大小相等，方向相反；因此这个积分为零。

一个粒子飞过电磁場的期間的总輻射等于表示式(9-70)的积

分，即

$$\Delta P_i=\frac{2e^2}{3c}\int\left(\frac{du_k}{ds}\right)^2 dx_i.$$

利用运动方程(3-52)

$$mc\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{c}F_{kl}u_l,$$

用电磁場張量来表示四度速度 $\frac{du_i}{ds}$，我們可将上式改写为另一形式。这时，我們得到

$$\Delta P_i=\frac{2e^4}{3m^2c^5}\int(F_{kl}u_l)^2 dx_i. \qquad (9-71)$$

这个方程的时間分量是总輻射能量 $\Delta\mathscr{E}$。用表示为三度量的式子来代替所有的四度量，我們便得到

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{2e^4}{3m^2c^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{V})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}dt. \qquad (9-72)$$

同样，对于总輻射冲量，我們有

$$\Delta\mathbf{P}=\frac{2e^4}{3m^2c^5}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{V})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathbf{V}\,dt. \qquad (9-73)$$

从公式(9-72)可以看出，对于与光速相近的速度，在單位时間内所輻射出的总能量基本上与$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$成比例，即与运动粒子的能量平方成比例。唯一的例外是在电場内沿着場的方向的运动。在这种情形下，分母里的因子$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$与分子里的同样的因子相消，因而輻射与粒子的能量无关。

最后，还有快速运动电荷所产生的輻射的角分布問題。为了解决这个問題，利用李納特-魏西尔特的場公式(8-20)和(8-21)是比較方便的。在远处，我們只保留 $\frac{1}{R}$ 的較低阶的項(公式 18-20)

中的第二项)。引用在輻射方向的單位矢量 $\mathbf{n}(\mathbf{R}=\mathbf{n}R)$，我們就有电荷所建立的場的公式

$$\mathbf{E}=\frac{e}{c^2R}\frac{\mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{V}}{c}\right)\times\mathbf{W}\right\}}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)^3},\quad \mathbf{H}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}, \tag{9-74}$$

等式右边的一切量都取推迟的瞬間 $t'=t-\frac{R}{c}$ 的值($\mathbf{W}=\dot{\mathbf{V}}$ 是粒子的加速度)。

輻射到立体角 do 內的强度

$$dI=\frac{c}{4\pi}E^2R^2\,do.$$

展开 E^2，我們便得到

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{W})(\mathbf{V}\cdot\mathbf{W})}{c\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^5}+\frac{\mathbf{W}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{W})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^6}\right\}do. \tag{9-75}$$

假如想要定出在电荷运动的全部时間内总輻射的角分布，那么我們必須将强度对时間积分。这时必須記着，被积分的式子是 t' 的函数；因此我們必須写

$$dt=\frac{\partial t}{\partial t'}dt'=\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)dt' \tag{9-76}$$

(見 8-18)，然后再直接对 t' 积分。这样一来，我們就得到立体角元 do 內的总輻射的表示式

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}=\frac{e^2}{4\pi c^3}d_0\int\left\{\frac{2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{W})(\mathbf{V}\cdot\mathbf{W})}{c\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^4}+\frac{\mathbf{W}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{W})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)^5}\right\}dt \qquad (9\text{-}77)$$

(我們略去了积分变量上的一撇)。

習　　題

一个电荷 e_1 以与光速同数量級的速度从庫侖場(場的位为 $\varphi, \varphi=e_2/r$)中飞过，求其总輻射。

解：当經过場时，电荷几乎不偏轉，因此在(9-72)式中，我們可以将 $\mathbf{V}$ 当作常数，所以

$$\mathbf{E}=\frac{e_2\mathbf{r}}{r^3}=\frac{e_2\mathbf{r}}{(\rho^2+v^2t^2)^{\frac{3}{2}}},\quad x=vt,\ y=\rho$$

(見§9-4中的習題4)。将(9-72)对时間积分，結果我們得到总輻射

$$\Delta\mathscr{E}=\frac{\pi e_1^4e_2^2}{12m^2c^3\rho^3v}\,\frac{4-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

§9-8. 匀速圓周运动电荷的輻射

我們詳細地来研究一个以任意速度在均匀恒定磁場內沿圓周运动的电荷的輻射。軌道的半徑 r 和运动的循环頻率 w_0 可通过磁場强度 H 及粒子速度 v 来表示，其公式(見§3-7)为

$$r=\frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\qquad \omega_0=\frac{v}{r}=\frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \qquad (9\text{-}78)$$

沿着所有方向的总輻射强度可以直接从(9-72)求得，不过必須使 $\mathbf{E}=0$, $\mathbf{H}\perp\mathbf{V}$:

$$I=\frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{9-79}$$

我們看出，总强度与粒子的冲量平方成比例。

假如我們对輻射的角分布有兴趣，那么，我們必須应用公式(9-77)。在一个运动周期內平均的强度是一个有趣的量。为此，我們将(9-77)式在粒子作圓周运动的周期內积分，所得結果再用周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ 除之。

我們选擇軌道平面作为 XY 平面(原点在圓心)，而使 YZ 平面經过輻射方向 $\mathbf{n}$。磁場沿着 Z 軸。此外，以 θ 表輻射方向 $\mathbf{n}$ 和 Z 軸的夹角($\mathbf{n}$ 的極角)，而 $\varphi=w_0t$ 表粒子的矢徑和 X 軸的夹角，那么，$\mathbf{n}$ 与粒子速度 $\mathbf{V}$ 的夹角余弦等于 $\cos(\mathbf{n},\mathbf{V})=\sin\theta\cos\varphi$ (矢量 $\mathbf{V}$ 在 XY 平面内，而且在每一瞬間都垂直于粒子的矢徑)。按运动方程[見(3-33)]

$$\dot{\mathbf{V}}=\frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}[\mathbf{V}\times\mathbf{H}],$$

我們用場 $\mathbf{H}$ 和粒子速度 $\mathbf{V}$ 来表示加速度 $\dot{\mathbf{V}}$。經过簡單計算后，我們得到

$$\overline{dI}=do\frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta+\left(\frac{v}{c}-\sin\theta\cos\varphi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^5}d\varphi \tag{9-80}$$

(对时間的积分已化为对 $\varphi=\omega_0t$ 的积分)。积分过程虽然复杂一些，但是是初等的。結果得到下面的公式：

$$\overline{dI}=do\frac{e^4H^2v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2c^5}\left[\frac{2+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{5/2}}-\right.$$

$$-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(4+\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta}{4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{\frac{7}{2}}}\Bigg]. \tag{9-81}$$

$\theta=0$（与軌道平面垂直）时的輻射强度与 $\theta=\frac{\pi}{2}$（在軌道平面內）时的輻射强度之比等于

$$\frac{\left(\frac{dI}{do}\right)_{\frac{\pi}{2}}}{\left(\frac{dI}{do}\right)_0}=\frac{4+3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{2}}}。$$

当 $v\to 0$ 时，这个比值趋近于 $\frac{1}{2}$，但是对于与光速接近的速度，它就变为很大了。換句話說，对于高速运动，輻射主要集中在軌道平面附近。从 $1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\sim 1-\frac{v^2}{c^2}$ 这个条件，很容易求出包含輻射之主要部分的角区間的"寬度" $\Delta\theta$，只須注意到 $\theta=\frac{\pi}{2}\pm\Delta\theta$，$\sin\theta\cong 1-\frac{(\Delta\theta)^2}{2}$。显而易見，

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9-82}$$

下面，我們来研究輻射的光譜分布。既然电荷的运动是周期性的 $\left(周期\ T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi r}{v}\right)$，那么問題就在于展开为傅里叶級数。从矢势出發来計算是便利的。对于矢势的傅里叶分量，我們有公式（見 § 9-1）

$$\mathbf{A}_n=e\frac{e^{ikR_0}}{cR_0T}\oint e^{i(\omega_0nt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\,d\mathbf{r}.$$

式中是沿着粒子的軌道（圓周）进行积分。对于粒子的坐标，我們有 $x=r\cos\omega_0t$，$y=r\sin\omega_0t$。我們选擇角 φ $(\varphi=\omega_0t)$ 作为积分变数。注意到 $dx=-r\sin\varphi d\varphi$，而 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}=kr\sin\theta\sin\varphi=\frac{nv}{c}\sin\theta\sin\varphi$ $\left(\theta\ 是輻射方向和\ Z\ 軸所夹之角；k=\frac{n\omega_0}{c}=\frac{nv}{cr}\right)$，我們便得到矢的 x 分量的傅里叶分量：

$$A_{xn}=-\frac{ev}{2\pi cR}e^{ikR_0}\int_0^{2\pi}e^{in\left(\varphi-\frac{v}{c}\sin\theta\sin\varphi\right)}\sin\varphi d\varphi.$$

在§9-4中，我們已經遇到过这样的积分。它可以用貝塞耳函数的导数来表示：

$$A_{xn}=-\frac{iev}{cR_0}e^{ikR_0}J'_n\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right).\qquad(9\text{-}83)$$

A_{yn} 可用同样的方法計算：

$$A_{yn}=\frac{e}{R_0\sin\theta}e^{ikR_0}J_n\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right).\qquad(9\text{-}84)$$

沿 Z 軸的分量显然总是为零。

按§9-1的各公式，对于頻率为 $\omega=n\omega_0$ 并在立体角元 do 内的輻射强度，我們有

$$I_n=\frac{c}{2\pi}|\mathbf{H}_n|^2R_0^2\,do=\frac{c}{2\pi}|\mathbf{k}\times\mathbf{A}_n|^2R_0^2\,do.$$

注意到

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{k}|^2=A_x^2k^2+A_y^2k^2\cos^2\theta,$$

并将(9-83)和(9-84)代入，我們便得到下面的輻射强度公式（蕭特，1912年）：

$$dI_n=\frac{n^2e^4H^2}{2\pi c^3m^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\cot^2\theta J_n^2\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{v^2}{c^2}J'^2_n\left(\frac{nv}{c}\sin\theta\right)\right]do.\qquad(9\text{-}85)$$

为了求頻率为 $\omega=n\omega_0$ 的輻射沿一切方向的总强度，这个式子必須对全部角积分。然而这个积分不能以有限形式进行。作一系列利用貝塞耳函数理論中某些关系的变换，所要求的积分可以写成下面的形式：

$$I_n=\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{m^2c^2v}\left[\frac{nv^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right)-\right.$$
$$\left.-n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{\frac{v}{c}}J_{2n}(2n\xi)\,d\xi\right].\qquad(9\text{-}86)$$

現在我們更加詳細地研究当粒子运动速度接近光速时的輻射的光譜分布（阿玆莫維奇及波麦南学克，1945）。以后可以知道，在这种情形下的輻射中起主要作用的是具有 n 大的頻率。由于这个原因，我們来求对于大 n $\left(\frac{v}{c}\text{ 很接近于一}\right)$ 的貝塞耳函数的漸近式。将貝塞耳函数写成积分形式

$$J_{2n}(2n\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{2in(\varphi-\xi\sin\varphi)}\,d\varphi,$$

我們注意，在所考慮的情形下，在积分內积分变量 φ 的小値起主要作用（因为当 φ 很大时，被积分函数是振动很快的函数）。按照这个道理，我們将被积分函数的指数展为 φ 的冪級数：

$$J_{2n}(2n\xi)\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2in\left[(1-\xi)\varphi+\frac{\varphi^3}{6}\right]}\,d\varphi$$

（积分可以伸延到从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的整个范圍路程，因为积分收斂得很快；三次項应当保留，因为在我們感兴趣的情形里，$(1-\xi)$是小的，因而一次項是小的）。但是，我們所求出的結果可以直接化为艾礼函数（見第 179 頁中的脚注）。因此我們得到貝塞耳函数的漸近式如下：

$$J_{2n}(2n\xi)\approx\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}\sqrt{\pi}}\Phi\left[2n^{\frac{2}{3}}(1-\xi)\right].\qquad(9\text{-}87)$$

将(9-87)代入(9-86)，我們便得到对于大的 n 的輻射的光譜分布公式①

$$I_n=-\frac{2e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\pi}\,m^2c^3}\left\{\Phi'(u)+\frac{u}{2}\int_u^{\infty}\Phi(u)\,du\right\},\quad(9\text{-}88)$$

---

① 代入后，上限 $2n^{\frac{2}{3}}$ 变为 $+\infty$（因为 n 是很大的），而下限 $2\left(1-\frac{v}{c}\right)$則变为 $1-v^2/c^2$（因为 $v\cong c$）。此外，在花括号前的系数中的 v 已經用 c 代替了。

$$u=n^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

当 $u\to 0$ 时，花括号內的函数趋近于常数極限 $\Phi'(0)=-0.4587\cdots$。因此，当 $u\ll 1$ 时，我們有

$$I_n=0.52\frac{e^4H^2}{m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)n^{\frac{1}{3}},\quad 1\ll n\ll\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}},\tag{9-89}$$

就是說，第 n 次諧波的强度与 $n^{\frac{1}{3}}$ 成比例。当 $u\gg 1$ 时，我們可以用艾礼函数的漸近式（見第 179 頁中的脚注）从而得到

$$I_n=\frac{e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}\,m^2c^3}\exp\left\{-\frac{2}{3}n\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\},$$

$$n\gg\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}},\tag{9-90}$$

就是說，当 n 很大时，强度按指数規律下降。因此，光譜在 $n\sim\sim\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 时有極大值，而輻射的主要部分是集中在頻率

$$\omega\sim\omega_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{eH}{mc}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\tag{9-91}$$

的区間內。旣然 ω 的这些値是很大的，而相邻的頻率的距离是 ω_0（它是比較小的），那么我們可以說光譜有"似連續"的性質，它由很多相距很近的譜綫所組成。

習 題

1. 一个粒子以不与光速接近的速度在圓周上运动，求 n 大的輻射之光譜分布的漸近公式。

解： 利用第 222 頁上的脚注內所介紹的貝塞耳函数漸近式，我們从(9-86)求得

$$I_n=\frac{e^4H^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}\,m^2c^3}\left(\frac{\frac{v}{c}}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}e^{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^{2n}.$$

假如 $n(1-v^2/c^2)^{\frac{3}{2}}\gg 1$. 这个公式是可以应用的; 假如，此外，$1-v^2/c^2$ 也很小，那么，所得的公式化为(9-90)。

2. 一个粒子在均匀恒定磁場內作圓周运动，求能量随时間变化的規律，求能量的輻射損失。

解：按照(9-79)，对于在單位时間內的能量損失，我們有

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{2e^4H^2}{3m^4c^7}(\mathscr{E}^2-m^2c^4),$$

($\mathscr{E}$ 是粒子的能量)。由此可得

$$\operatorname{arcth}\frac{\mathscr{E}}{mc^2}-\operatorname{arcth}\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}=\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t,$$

式中，$\mathscr{E}_0$是粒子在起始时刻($t=0$)的能量。当 $t\to\infty$ 时，能量减少而漸近地趋近于極限 $\mathscr{E}=mc^2$(粒子完全停止)。

§9-9. 輻射阻尼

在§8-4中已經指出，电荷体系的場的势展为 $\frac{v}{c}$ 的冪級数，在二級近似中，导出完全确定(在二級近似中)电荷运动的拉格朗日函数。現在我們将場展开到更高次的項。并研究这些項所起的影响。

在标势
$$\varphi=\int\frac{1}{R}\rho_{t-\frac{R}{c}}dV$$

的展开式中的$\frac{1}{c}$的三次方的項是

$$\varphi^{(3)}=-\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\,dV. \tag{9-92}$$

(为簡單起見，此处我們沒有写出展开式的第一項，見§8-4)。按照求(8-33)时的同样理由，在展开矢势时，我們只須取 $1/c$ 的二次方的項，就是

$$\mathbf{A}^{(2)}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{j}\,dV. \tag{9-93}$$

我們将这些势作下列变換:

$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad}f,$$

并这样来选擇函数 f,使标势 $\varphi^{(3)}$ 为零。为此,显然必須有

$$f=-\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\,dV.$$

这时,新的矢势等于

$$\mathbf{A}'^{(2)}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{j}dV-\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho\,dV=$$
$$=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\mathbf{j}\,dV-\frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\mathbf{R}\rho\,dV.$$

将积分变为对各电荷的求和,則右边第一项变为 $-\frac{1}{c^2}\Sigma e\dot{\mathbf{V}}$。在右边第二項中,我們写出 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$,此处的 $\mathbf{R}_0$ 和 $\mathbf{r}$ 的意义和平常一样(見 § 9-1);这时,$\dot{\mathbf{R}}=-\dot{\mathbf{r}}=-\mathbf{V}$,而第二項則取 $\frac{1}{3c^2}\Sigma e\dot{\mathbf{V}}$ 的形式。因此,

$$\mathbf{A}'^{(2)}=-\frac{2}{3c^2}\Sigma e\dot{\mathbf{V}}.\tag{9-94}$$

与这个势相应的磁場为零($\mathbf{H}=\text{rot}\,\mathbf{A}'^{(2)}=0$),因为 $\mathbf{A}'^{(2)}$ 并不显含坐标。电場 $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$ 等于

$$\mathbf{E}=\frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}},\tag{9-95}$$

式中 $\mathbf{d}$ 是电荷体系的偶極矩。

因此,場展开式的三次方的各項导致作用于电荷上的某些附加力,在拉格朗日函数(8-36)中是不包含这些力的;这些力和电荷加速度的时間导数有关。

讓我們考虑一个作稳定运动①的电荷体系,并且計算場(9-95)在單位时間內所作之功的平均值。作用于每个电荷 e 上的力是 $\mathbf{f}=e\mathbf{E}$,就是

$$\mathbf{f}=\frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}.\tag{9-96}$$

① 更准确地說,是这样一种运动,在略去使运动逐漸减慢的輻射的情况下,它是稳定的。

这个力在單位时間內所作的功是 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}$，所以在所有电荷上所作的总功就等于对所有电荷的叠加：

$$\Sigma\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}=\frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\cdot\Sigma e\mathbf{V}=\frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\cdot\dot{\mathbf{d}}=\frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\cdot\ddot{\mathbf{d}})-\frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathbf{d}})^2.$$

在对时間求平均值时，第一項等于零，因此功的平均值等于

$$\Sigma\mathbf{f}\cdot\mathbf{V}=-\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{9-97}$$

但是，右边的式子，如将符号倒过来，恰恰是这个电荷体系在單位时間內輻射出去的平均能[見(9-23)]。因此，在三級近似中出現的力(9-96)描写輻射对电荷的反作用。这些力称为輻射阻尼，或称为洛倫茲摩擦力。

与輻射的电荷体系能量损失的同时，也出現了冲量矩的一些損失。單位时間內角冲量矩的减少，$d\mathbf{M}/dt$，利用阻尼力的表示式很容易求出。取冲量矩 $\mathbf{M}=\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ 对时間的导数，則得 $\dot{\mathbf{M}}=\Sigma\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}}$，因为 $\Sigma\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}=\Sigma m(\mathbf{V}\times\mathbf{V})=0$。用作用于粒子上的摩擦力(9-96)来代替粒子冲量的时間导数，我們得到

$$\dot{\mathbf{M}}=\Sigma\mathbf{r}\times\mathbf{f}=\frac{2}{3c^3}\Sigma e\mathbf{r}\times\dddot{\mathbf{d}}=\frac{2}{3c^3}\mathbf{d}\times\dddot{\mathbf{d}}.$$

我們所感兴趣的是稳定运动冲量矩損失的时間平均值，正如以前我們感兴趣的是能量損失的时間平均值一样。写出

$$\mathbf{d}\times\dddot{\mathbf{d}}=\frac{d}{dt}(\mathbf{d}\times\ddot{\mathbf{d}})-\dot{\mathbf{d}}\times\ddot{\mathbf{d}},$$

而且注意到在求平均值时，对时間的导数(第一項)为零，則最后我們求得輻射体系的冲量矩的平均損失如下：

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=-\frac{2}{3c^3}\dot{\mathbf{d}}\times\ddot{\mathbf{d}}. \tag{9-98}$$

單独的一个电荷在外場中运动时也發生輻射阻尼。它等于

$$\mathbf{f}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{V}}. \tag{9-99}$$

对于單独的一个电荷，我們总可以选擇这样一个参考系統，在其中这个电荷在給定瞬間靜止在坐标的原点。假如在这个参考系統中我們計算出电荷所建立的場的展开式中的高次項，那么就会發現这些高次項有下述特性。当从电荷到观察点的矢徑趋近于零时，这些項是矢徑方向的函数，对所有方向求平均值时变为零。換句話說，当我們这样求平均值时，电荷"自己对自己"的作用力的展开式的高次項变为零。因此在單独一个电荷的情形里，公式(9-99)在某种意义上，是在电荷在其中是靜止的参考系統中的輻射反作用的准确公式。

然而我們必須記着，利用阻尼力来描写电荷"自己对自己"的作用，一般說来是不能令人滿意的，而且包含着矛盾。在沒有外場存在时，仅有力(9-99)作用于电荷上，电荷的运动方程为

$$m\dot{\mathbf{V}}=\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{V}}.$$

这个方程，除了平凡解 $\mathbf{V}=$常数外，还有另外一个解，在这个解中，$\dot{\mathbf{V}}$ 与 $e^{\frac{3mc^3}{2e^2}t}$ 成比例，即随时間无限制地增加。这就意味着，例如，一个电荷在經过任何場并从該場透出时，应該无限制地"自我加速"。这种荒謬的結果表明了公式(9-99)的应用的局限性。

我們可以提出这个問題，既然电动力学滿足能量守恒定律，如何能够导出这样荒謬的結論，即一个自由电荷无限制地增加它的能量呢？实际上这个困难的根伏在前面（§ 5-2）所提到的关于基本粒子有无限大的电磁"固有質量"之內。当我們在运动方程內写出电荷的質量为有限时，我們在实質上已經形式地給电荷以負无限大的，而又是非电磁根源的"固有質量"，这个質量同电磁質量結合在一起，組成为粒子的有限質量。但是，因为从一个无限大減去另一个无限大不是一个完全正确的数学运算，这就导致一系列的額外困难，上面所提的就是这些困难之一。

在一个电荷在其中速度甚小的坐标系統中，輻射阻尼也包含在內的运动方程有如下的形式：

$$m\dot{\mathbf{V}}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}+\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{V}}. \qquad (9\text{-}100)$$

按照前面的討論，这个方程只能应用到阻尼力比外場作用于电荷上的力小很多的范圍內.

为了明白这个条件的物理意义，我們作如下討論。电荷在給定瞬間是靜止的那个參考系統中，速度对时間的二次导数，当略去阻尼力时，等于

$$\ddot{\mathbf{V}}=\frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}}+\frac{e}{mc}\dot{\mathbf{V}}\times\mathbf{H}.$$

在第二項中我們将 $\dot{\mathbf{V}}=\frac{e}{m}\mathbf{E}$ 代入(准确到同样的程度)，則得到

$$\ddot{\mathbf{V}}=\frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}}+\frac{e^2}{m^2c}\mathbf{E}\times\mathbf{H}.$$

与此相应，阻尼力包含两項：

$$\mathbf{f}=\frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}}+\frac{2e^4}{3m^2c^4}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \qquad (9\text{-}101)$$

假如 ω 是运动的頻率，那么，$\dot{\mathbf{E}}$ 就与 $\omega\mathbf{E}$ 成比例，因此，第一項与 $\frac{e^3\omega}{mc^3}\mathbf{E}$ 同数量級，第二項与$\frac{e^4}{m^2c^4}EH$同数量級。由此可見，从阻尼力比外場加在电荷上的力 $e\mathbf{E}$ 小很多的条件，首先得到

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega\ll 1,$$

或者，引入波長 $\lambda\sim c/\omega$，

$$\lambda\gg\frac{e^2}{mc^2}. \qquad (9\text{-}102)$$

因此，輻射阻尼的公式(9-99)仅仅当落在电荷上的輻射的波長比电荷的"半徑" e^2/mc^2 大很多时方能应用。我們又一次看到，与 e^2/mc^2 同数量級的距离是电动力学导致內在矛盾的界限（見§5-2 节)。

其次，将阻尼力的第二項与力 $e\mathbf{E}$ 相比較，我們便得到下面的条件：

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}. \qquad (9\text{-}103)$$

因此，場本身也必須不太大。与 m^2c^4/e^3 同量級的場也是經典电动力学导致内在矛盾的界限。这里我們还必須記着，实际上，因为量子效应，电动力学对于特别小的場也不适用①。

我們現在来求輻射阻尼在相对論中的表示式（对于一个單独的电荷），这个表示式子也适用于速度与光速相近的运动。这个力現在是四度矢量 f_i，f_i 应当加在电荷的运动方程内，这个运动方程写为四度形式是

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k + f_i. \qquad (9\text{-}104)$$

为了求出 f_i，我們注意到当 $v \ll c$ 时，它的三个空間分量应当为矢量 $\mathbf{f}/c$(9-99)的分量。很容易看出，矢量 $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}$ 有这个特性。但是它不滿足对任意四度力的分量都成立的恒等式 $f_iu_i = 0$。为了滿足这个条件，我們必須加某一个輔助四度矢量于上面的式子，这个輔助四度矢量由四度速度 u_i 及其导数組成。这个矢量的三个空間分量在 $\mathbf{V}=0$ 的極限情形下变为零，但不改变，为表示式 $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}$ 所决定的 f_i 的正确値。四度矢量 u_i 就有这个特性，因而所求的輔助項有 αu_i 的形式。标量 α 必須如此选擇，使輔助关系 $f_iu_i = 0$ 能被滿足。結果我們得到

$$f_i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u_i}{ds^2} + u_iu_k\frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \qquad (9\text{-}105)$$

按照运动方程，用作用于粒子上的外电磁場的場張量直接表示 d^2u_i/ds^2，这个公式可以写成另一形式。

① 只对于与 m^2c^3/he 同量級的場才适用，h 是普朗克常数。

$$\frac{du_i}{ds}=\frac{e}{mc^2}F_{ik}u_k,$$

$$\frac{d^2u_i}{ds^2}=\frac{e}{mc^2}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}u_ku_l+\frac{e^2}{m^2c^4}F_{ik}F_{kl}u_l.$$

在作代換时，我們必須記着，对指标 i、k 反对称的張量 $\partial F_{ik}/\partial x_l$ 与对称張量 u_iu_k 之积恒等于零。所以，

$$f_i=\frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}u_ku_l-\frac{2e^4}{3m^2c^4}F_{il}F_{kl}u_k-\frac{2e^4}{3m^2c^4}(F_{kl}u_l)^2u_i.\quad(9\text{-}106)$$

四度力 f_i 在电荷运动經过一給定場的世界綫上的积分应当与从电荷輻射的总四度冲量 ΔP_i 相合（有相反的符号），ΔP_i 已为公式(9-71)所决定，这类似于在非相对論的情形中力 $\mathbf{f}$ 的功的平均值与偶極輻射强度相合[見(9-97)式]。为了証明实际上確是如此，倒也不难。在(9-106)式中的前两項与在(9-105)式中的第一項 $\left(\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u_i}{ds^2}\right)$ 相吻合，而且在进行积分时都为零，因为在无穷远处，粒子沒有加速度，即 $\frac{du_i}{ds}=0$。第三項給出

$$-\int f_ids=\frac{2e^4}{3m^2c^4}\int(F_{kl}u_l)^2u_ids,$$

它恰恰与(9-71)式完全吻合。

假如粒子的速度趋近于光速（"超相对論"的情形），那么，在公式(9-106)的三項中，包含有四度速度分量的三重积的第三項增加得最快（我們提醒一下，四度速度的分量在分母中包含有 $\sqrt{1-v^2/c^2}$）。因此，当 v/c 十分接近于1时，我們可以写出

$$f_i=-\frac{2e^4}{3m^2c^4}(F_{kl}u_l)^2u_i.\quad(9\text{-}107)$$

从空間分量得到阻尼力的表示式

$$f_x=-\frac{2e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2}{(1-v^2/c^2)}.\quad(9\text{-}108)$$

在此处我們选定速度 $\mathbf{V}$ 的方向为 X 軸的方向，而只要可能，我們就

使 v 等于 c。由此可見，对于一个超相对論的粒子，輻射阻尼与它的能量的平方成比例。

我們来注意下面的重要情况。在前面已經指出，我們所得到的輻射阻尼的表示式仅仅可以应用于比 m^2c^4/e^3 小很多（在粒子是静止的 K_0 参考系統中）的場。設 F 为横向（与运动方向垂直的）場的数量級，这个場是对于参考系統 K 而言的，在这个参考系統中，粒子运动的速度为 v [在公式(9-108)中的場]。这时，在系統 K_0 中，場的数量級是 $F/\sqrt{1-v^2/c^2}$（見 § 3-10 中的变换公式）。因此 F 应当满足条件

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ll 1. \tag{9-109}$$

同时，阻尼力(9-108)的数量級是

$$f\sim\frac{e^4F^2}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)},$$

而且可以看出，甚至当阻尼力 f 本身比电磁場中作用在粒子上的通常的洛倫兹力大很多时（$f\gg eF$），条件(9-109)也可以满足（对于足够小的 $1-v^2/c^2$）。因此，对于一个超相对論的粒子，我們可能有这种情形，在这种情形中，輻射阻尼(9-108)是作用于其上的主要的力。

在这种情况下，粒子在每單位行程中所損失的动能 $\left(-\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dx}\right)$ 可以認为等于仅仅是一个阻尼力 f_x；注意到阻尼力与粒子的能量平方成比例，我們可以写出

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dx}=-g(x)\,\mathscr{E}^2_{\text{кин}},$$

式中，$g(x)$ 是比例系数，这个系数与坐标 x 有关，并且按照(9-108)式用場的横向分量来表示。将这个微分方程积分，則得到

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кин}}}=\frac{1}{\mathscr{E}_0}+\int\limits_{-\infty}^{x} g(x)dx,$$

式中，$\mathscr{E}_0$ 代表粒子的初能量（当 $x\to-\infty$ 时的能量）。就特例言之，粒子的終能量（在粒子經过場以后的能量），決定于公式

$$\frac{1}{\mathscr{E}_1}=\frac{1}{\mathscr{E}_0}+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx.$$

由此可見，当 $\mathscr{E}_0\to\infty$ 时，終能量 $\mathscr{E}_1$ 趋近于一个常数極限，而与 $\mathscr{E}_0$ 无关（И. 波麦南蕭克，1939）。換句話說，在經过場以后，粒子的能量不可能超过等式

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$$

所决定的能量 $\mathscr{E}_{\text{кр}}$，将 $g(x)$ 的式代入，此等式可变为

$$\mathscr{E}_{\text{кр}}^{-1}=\frac{2}{3m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2]dx. \quad (9\text{-}110)$$

習　題

1. 两个相吸引的粒子作橢圓运动（运动的速度比光速小很多），由于輻射而損失了能量。求相互"墜落"的时間。

解： 粒子在單位时間內所損失的能量的平均值是（見§9-4的習題1）。

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dt}=\frac{(2|\mathscr{E}|)^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{5}{2}}|e_1e_2|^3}{c^3M^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(1-\frac{2|\mathscr{E}|M^2}{3\mu e_1^2e_2^2}\right). \quad (1)$$

（我們提醒一下，对于橢圓运动，$\mathscr{E}<0$，因此 $d|\mathscr{E}|/dt>0$）；我們假設一周所損失的能量是很小的，这样，我們就可以利用它的平均值。粒子的冲量矩隨能量減少。在單位时間內所損失的冲量矩为公式（9-98）所决定；将 $\ddot{\mathbf{d}}$ 的表示式（9-36）代入，并且注意到 $\mu\ddot{\mathbf{r}}=-|e_1e_2|\mathbf{r}/r^3$ 和 $\mathbf{M}=\mu\mathbf{r}\times\mathbf{v}$，我們便可求得

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=-\frac{2|e_1e_2|}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

我們将这个式子在运动周期內平均；r^{-3} 的平均值的計算象在§9-4的習題1中求 r^{-4}

的平均值一样。我們求得單位时間内冲量矩的損失如下：

$$\frac{dM}{dt}=-\frac{2\,e_1e_2\,|(2\mu|\mathscr{E}|)^{\frac{1}{2}}}{3c^3M^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2, \tag{2}$$

(象(1)一样，我們略去了平均的符号)。用(2)来除(1)，我們得到微分方程

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dM}=-\frac{\mu e_1^2e_2^2}{2M^3}\left(3-2\frac{|\mathscr{E}|M^2}{\mu e_1^2e_2^2}\right),$$

将上式积分，則得到

$$|\mathscr{E}|=\frac{\mu e_1^2e_2^2}{2M^2}\left(1-\frac{M^3}{M_0^3}\right)+\frac{|\mathscr{E}_0|}{M_0}M. \tag{3}$$

积分常数是这样选擇的，使得当 $M=M_0$ 时，$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0$，此处的 M_0 和 $\mathscr{E}_0$ 是粒子的初冲量矩和初能量。

粒子相互"墜落"与 $M\to 0$ 相对应。从(3)可以看出，这时 $\mathscr{E}\to-\infty$。我們指出，$|\mathscr{E}|M^2$ 趋近于 $\frac{1}{2}\mu e_1^2e_2^2$，并且从公式(9-38)可以看出偏心率 $\varepsilon\to 0$，即是說，当粒子互相接近时，軌道趋近于圓。将(3)代入(2)，我們就决定了表示为 M 的函数的导数 $\frac{dt}{dM}$，此后对 M 求积分，积分限是 M_0 和 0，就直接得到"墜落"的时間

$$t_{\text{пад}}=\frac{c^3M^5}{\sqrt{2\mu|\mathscr{E}_0|}\,\mu e_1^2e_2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left(\sqrt{\mu e_1^2e_2^2}+\sqrt{2M_0^2|\mathscr{E}_0|}\right)^{-2}.$$

2. 求粒子經过磁偶極子 $\mathfrak{m}$ 的場之后的極限能量；矢量 $\mathfrak{m}$ 与运动方向是在同一平面内。

解：我們选定經过矢量 $\mathfrak{m}$ 和运动方向的平面为 XZ 平面，粒子在这个平面内沿着 X 軸运动，但与 X 軸相距为 ρ。对于磁偶極子的場的横向分量[見(5-60)式]，我們有

$$H_y=0,$$

$$H_z=\frac{3(\mathfrak{m}\cdot\mathbf{r})z-\mathfrak{m}\,r^2}{r^5}=\frac{\mathfrak{m}}{(\rho^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\{3(\rho\cos\varphi+$$

$$+x\sin\varphi)\rho-(\rho^2+x^2)\cos\varphi\},$$

式中，φ 是 $\mathfrak{m}$ 与 Z 軸間的夹角。以之代入(9-110)，进行积分，我們便得到

$$\mathscr{E}_{\text{кр}}^{-1}=\frac{\mathfrak{m}^2\pi}{2m^2c^4\rho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left\{\frac{41}{32}-\frac{30}{16}\sin^2\varphi+\frac{5}{3}\sin\varphi\cos\varphi\right\}.$$

3. 写出在相对論情形中的阻尼力的三度表示式。

解：計算四度矢量(9-106)的空間分量，我們得到

$$\mathbf{f}=\frac{2e^3}{3mc^3}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,\mathbf{v}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\right)\mathbf{H}\right\}+$$

$$+\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}+\frac{1}{c}\,\mathbf{H}\cdot(\mathbf{H}\cdot\mathbf{V})+\frac{1}{c}\,\mathbf{E}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{E})\right\}+$$

$$+\frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{V}\left\{\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{V}\cdot\mathbf{H}\right)^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{V})^2\right\}.$$

§9-10. 在超相对論情形下的輻射的光譜分解

以近乎光速的速度运动着的(超相对論的情形)粒子的輻射的角分布具有一个特殊的特征，这个特征可以直接从輻射强度的普遍公式(9-75)看出。在这个式子的各項中的分母內，出現了$\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)$的高次幂。假如 v 接近于 c [即$(1-v/c)\ll 1$]，那么，在 $\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\cong v$ (就是說 $\mathbf{n}$ 几乎与 $\mathbf{V}$ 平行)的狹的角間隔內，强度有一个尖銳的極大值。

因此，一个超相对論的粒子的主要輻射方向是在它自己的运动方向。

很容易估計运动方向 $\mathbf{V}$ 附近的輻射显著地异于零的角間隔 $\Delta\theta$。写出

$$1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}=1-\frac{v}{c}\cos\theta\cong 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2},$$

我們就可以看出，这个差在間隔 $\Delta\theta\sim\sqrt{1-v/c}$ 內是小的 (与 $1-v/c$ 同数量級)，或者等值地說

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{9-111}$$

在求輻射的光譜分解时，角間隔 $\Delta\theta$ 的大小与粒子經过外电磁場时的偏轉角 α 的关系是重要的。α 角可以計算如下。粒子冲量的横向(与运动方向相垂直)变化，与同横向力 eF①与經过場的时間 $t\sim a/v\cong a/c$ 的乘积同数量級(此处的 a 是使場显著地有别于零的距离)。

这个量与冲量 $p=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cong\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$之比决定 α 角的

① 假如我們选定 X 軸沿着粒子的运动方向，那么，$(eF)^2$ 是洛倫茲力 $e\mathbf{E}+e\mathbf{V}/c\times\mathbf{H}$ 的 y 分量与 z 分量的平方之和，在此，我們可以使 $v\cong c$:

$$F^2=(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2.$$

大小的数量級（假定超相对論粒子的偏轉角 α 的絕对值是很小的）。因此，

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

所以，$\alpha/\Delta\theta$ 的数量級是

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}.$$

我們要注意这个事实，即这个比值与粒子的速度无关，而完全为外場本身所决定。

我們先假設

$$eFa \gg mc^2 \tag{9-112}$$

就是說，粒子的总偏轉角比 $\Delta\theta$ 大很多。这时，我們就可以說，在一指定方向的輻射主要在与运动方向几乎平行的那一部分軌道上發生（这一部分軌道与运动方向所成之角在間隔 $\Delta\theta$ 內），而这一部分軌道的弧長比 a 小很多。場 F 在这段弧內可以認为是不变的。又因为曲綫的一小段可以当作圓弧，所以我們可以引用在 § 9-8 中所求出的关于勻速圓周运动时的輻射（以 F 代 H）的結果。就特例言之，我們可以說，輻射的主要部分集中在

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{9-113}$$

頻率間隔內［見(9-91)式］。对于光譜分解的更詳細的計算，可參考本节習題 1。

在相反的極限情形下，

$$eFa \ll mc^2, \tag{9-114}$$

粒子的总偏轉角比 $\Delta\theta$ 小很多。在这种情形下，所有的輻射主要指向运动方向附近的狹的角間隔 $\Delta\theta$，而輻射从整个軌道到达某一給定点。在这种情形下，为了求輻射的光譜分解，我們利用場在波区的李納特-魏西尔特公式(9-74)，并求它的傅里叶分量。为此，我

們必須积分 $\mathbf{E}e^{i\omega t}$(对 t 积分)。但是表示式(9-74)是 $t-\frac{R}{c}$ 的函数，而 $t-\frac{R}{c}\cong t-\frac{R_0}{c}-\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{c}=t'-\frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{c}$ (此处的 $\mathbf{r}'=\mathbf{r}(t')\cong\mathbf{V}t'$ 是粒子的矢徑)。因此，从对于 t 的积分很容易变为对于 t' 的积分，只須注意

$$dt=\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)dt'$$

[見(9-76)式]和

$$e^{i\omega t}=e^{i\omega\left(t'-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)}\cong e^{i\omega t'\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)}.$$

結果我們得到

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{e}{2\pi c^2 R_0}\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{V}}{c}\right)^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{n}\times\left\{\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{V}}{c}\right)\times\mathbf{w}(t)\right\}e^{i\omega t\left(1-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}}{c}\right)}dt \tag{9-115}$$

(略去了积分变量 y 上的一撇)。我們处处将速度 $\mathbf{V}$ 当作是不变的(因为粒子的偏轉在这种情形下是很小的)；仅仅加速度 $\mathbf{w}(t)$ 是变化的。

輻射主要集中的頻率間隔可以計算如下。(9-115)式中的被积分函数的指数因子的周期与

$$\frac{1}{\omega}\left(1-\frac{v}{c}\right)^{-1}\cong\frac{2}{\omega}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

同数量級。假如这个周期与粒子的加速度 $w(t)$ 發生显著变化的时間間隔 T 同数量級，这个积分将显著地有别于零。显然，时間 $T\sim a/v\cong a/c$ (a 是使場显著地有别于零的距离)。因此，我們求得

$$\omega\sim\frac{c}{a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{9-116}$$

这个頻率与粒子能量的关系和在(9-113)中一样，但系数是不同的。

对于积分(9-115)的更詳細地研究，請参看本节的習題 2。

習　題

1. 求满足条件(9-112)的总輻射强度(沿一切方向)的光譜分布。

解：从軌道的每个弧元上發出的輻射由公式(9-88)来决定，公式中应当以在給定点的横向力 F 代替 H，此外，还应当从不連續的頻率光譜变到連續的頻率光譜。这种过渡可以这样形式地来完成，即用 dn 来乘，并作以下的替换：

$$I_n dn = I_n \frac{dn}{d\omega} d\omega = I_n \frac{d\omega}{\omega_0}.$$

然后，再将强度对全部时間积分，我們便得到总輻射的光譜分布如下：

$$d\mathscr{E}_\omega = -d\omega \frac{2e\omega}{\sqrt{\pi}\, c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{u}\Phi'(u)+\frac{1}{2}\int_u^{\infty}\Phi(u)du\right]dt,$$

式中，$\Phi(u)$是艾礼函数，而其独立变数是

$$u=\left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{\frac{2}{3}}.$$

被积分函数是积分变数 t 的隐函数，两者的关系是通过 u 而联系着的(F 以及 u 沿着粒子的軌道变化，对于一給定的运动，这个变化可以認为与时間有关)。

2. 与上題相同，但满足条件(9-114)。

解：注意到与运动方向成小角 θ 的輻射起着主要的作用，我們可写出

$$1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{c}=1-\frac{v}{c}\cos\theta\simeq 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\simeq\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right).$$

引入向量 $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{n}-\mathbf{v}/v$($\boldsymbol{\theta}$ 的絕对値为 θ)，我們将(9-115)式改写(准确到更高次項)如下：

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{2e}{\pi c^2 R_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)^{-2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\frac{\omega t}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)}\left\{(\mathbf{w}\cdot\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)\mathbf{w}\right\}dt,$$

或者，引入符号 $\omega'=\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)$，

$$\mathbf{E}_\omega=\frac{e}{c^2R_0}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\left\{(\mathbf{w}_{\omega'}\cdot\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}-\frac{\omega'}{\omega}\mathbf{w}_{\omega'}\right\},$$

式中，$\mathbf{w}_\omega$ 是加速度的傅里叶分量。我們将此式代入公式(9-9)，$d\mathscr{E}_{n,\omega}=cR_0^2|\mathbf{E}_\omega|^2 do\,d\omega$，并对所有方向积分，(写 $do=\sin\theta\, d\theta d\varphi\simeq\theta d\theta d\varphi$)。結果，我們求得总輻射的光譜分解如下：

$$d\mathscr{E}_\omega=\frac{2\pi e^2}{c^3\omega}\int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty}|\mathbf{w}_{\omega'}|^2\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]d\omega'.$$

§ 9-11. 被自由电荷的散射

假如电磁波落在一个电荷体系上，那么，电荷在电磁波的作用下运动。这种运动又發生向所有方向的輻射；通常就說，發生原波的散射。

这种散射用散射体系在一給定方向在單位时間內所射出的能量与落在輻射体系上的能量通量密度之比来描述特征，最为便利。这个比値的量綱显然是面积，因而称为“有效散射截面”。

設 dI 为这个体系每秒輻射到立体角 do 內的能量，而輻射是由于以 $\mathbf{S}$ 为坡印廷矢量的入射波所引起的。这时，散射（到立体角 do 內的）有效截面等于

$$d\sigma=\frac{\overline{dI}}{\overline{S}}\tag{9-117}$$

（在符号上的一横表示对时間的求平均）。$d\sigma$ 对所有方向的积分 σ 是总有效散射截面。

我們考慮一个靜止的自由电荷所产生的散射。讓一平面單色綫性極化波射在这个电荷上。它的电場可以写成

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\alpha).$$

我們假設电荷在入射波影响下所得到的速度比光速小很多（一般情形确是如此）。这时我們可以認为作用于电荷上的力是 $e\mathbf{E}$，而由磁場所产生之力 $\frac{e}{c}\mathbf{V}\times\mathbf{H}$ 可以略去。在这种情形下，我們也可以略去电荷在場影响下的振动的位移。假如电荷在坐标原点附近振动，那么，我們可以假設作用在电荷上的場在一切时間都和在原点的場一样，就是說，

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\alpha).$$

既然电荷的运动方程是

$$m\ddot{\mathbf{r}}=e\mathbf{E},$$

而它的偶極矩 $\mathbf{d}=e\mathbf{r}$,那么,

$$\ddot{\mathbf{d}}=\frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{9-118}$$

为了計算散射的輻射,我們可以用偶極輻射的公式(9-21)(这是允許的,因为电荷在入射波影响下所得到的速度比光速小很多)。我們也应当注意,电荷所輻射的(即电荷所散射的)波的頻率显然与入射波的頻率相等。

将(9-118)代入(9-21),我們便得到

$$dI=\frac{e^4}{4\pi m^2c^3}(\mathbf{E}\times\mathbf{n})^2do.$$

另一方面,入射波的坡印廷矢量是

$$S=\frac{c}{4\pi}E^2.$$

由此我們可得到散射到立体角 do 內的有效截面

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\, do, \tag{9-119}$$

式中,θ 是散射方向(矢量 $\mathbf{n}$)和入射波的电場 $\mathbf{E}$ 所夹之角。我們看出,一个自由电荷的有效散射截面与頻率无关。

現在我們来求总有效截面 σ。为此,我們引用球坐标,其原点选在电荷所在之点,而使極軸沿着 $\mathbf{E}$ 的方向。因此

$$do=\sin\theta\, d\theta\, d\varphi;$$

将此式代入,再对 θ 从 0 到 π 积分,对 φ 从 0 到 2π 积分,我們求得

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2. \tag{9-120}$$

最后,我們求在入射波沒有極化(即普通光)的情形下的有效截面。为此,我們必須将(9-119)对矢量 $\mathbf{E}$ 的所有的方向求平均

值，$\mathbf{E}$ 是在垂直于入射波傳播方向的平面內(就是在垂直于波矢量 $\mathbf{k}$ 的平面內)。我們引用一个坐标系統，其 Z 軸沿着 $\mathbf{k}$，而 X 軸則沿着 $\mathbf{E}$。这时，方向 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{E}$ 所夹之角 θ 的余弦，即單位矢量 $\mathbf{n}$ 在 Z 軸上的投影，等于 $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$，此处的 ϑ 和 φ 是極角和方向 $\mathbf{n}$ 的方位角。对于 $\mathbf{E}$($\mathbf{E}$ 在与 $\mathbf{k}$ 垂直的平面內)的所有方向求平均值，就等于对方位角 φ 求平均值。我們有

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{\sin^2\vartheta}{2} = \frac{1+\cos^2\vartheta}{2},$$

代入(9-119)，我們便求得一个未極化的波被自由电荷散射的有效截面

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)do, \qquad (9\text{-}121)$$

式中 ϑ 是入射波的方向与散射波的方向所夹之角。

散射的存在引起，例如，作用于散射粒子上的力的出現。这可以从下面的考慮来証实。平均說来，在單位时間內，射在粒子上的波損失能量 $c\overline{W}\sigma$，此处的 $\overline{W}$ 是平均能量密度，而 σ 則是总有效散射截面。旣然場的冲量等于它的能量除以光速，所以入射波損失的冲量的絕对值就等于 $\overline{W}\sigma$。另一方面，假如有一个参考系統，电荷在其中在力 $e\mathbf{E}$ 影响下仅作微振动，而且振动的速度 v 也小，那么，在这个参考系統中，散射波中的总冲量通量等于(准确到 v/c 的高次項)零(在§9-7中已經証明了，在 $v=0$ 的参考系統中粒子不輻射冲量)。所以入射波所損失的冲量完全被散射粒子所“吸收”了。作用于粒子的平均力 $\bar{\mathbf{f}}$ 加到就等于單位时間內所吸收的平均冲量，即

$$\bar{\mathbf{f}} = \sigma\overline{W}\mathbf{n}_0. \qquad (9\text{-}122)$$

($\mathbf{n}_0$ 是單位矢量，其方向与入射波傳播的方向相同)。我們注意到，“平均”力相对于入射波之場內是二級量，而“瞬时”力(这个力的主要部分是 $e\mathbf{E}$)相对于入射波之場是一級量。

公式(9-122)也可以直接由求阻尼力(9-101)的平均值得之。第一项(与 E 成比例)在求平均值时化为零。从第二项得到

$$\bar{\mathbf{f}}=\frac{2e^4}{3m^2c^4}E^2\mathbf{n}_0=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{E^2}{4\pi}\mathbf{n}_0.$$

由于(9-120),这个式子与(9-122)相吻合。

習　題

1. 一个椭圆極化波被一个自由电荷散射,求其有效截面。

解: 波的場有如下形式:

$$\mathbf{E}=\mathbf{A}\cos(\omega t+\alpha)+\mathbf{B}\sin(\omega t+\alpha),$$

式中,A 和 B 是两个相互垂直的矢量(見 § 6-5)。与正文中推导相似,我們可求得

$$d\sigma=\frac{e^4}{m^2c^4}\frac{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})^2+(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})^2}{A^2+B^2}do.$$

2. 一个綫性極化波被一个在弹性力影响下作微振动的电荷(振子)散射。求有效截面。

解: 在入射波 $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha)$ 内,电荷的运动方程是

$$\ddot{\mathbf{r}}+\omega_0^2\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha),$$

式中,ω_0 是电荷的自由振动的频率。对于強迫振动,由此可得

$$\mathbf{r}=\frac{e\mathbf{E}_0\cos(\omega t+\alpha)}{m(\omega_0^2-\omega^2)}.$$

由此計算出 $\ddot{\mathbf{d}}$,我們便得到

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\sin^2\theta do,$$

(θ 是 E 与 n 所夾之角)。

3. 未極化的光被自由电荷散射,求退極化的程度(見 § 6-7)。

解: 从对称性的考慮出發,显然可見,构成散射光的两个分量是平面極化的,一个分量是在經过入射光綫与散射光的平面内,另外一个分量和这个平面垂直。我們选定 Y 軸在这个平面内。因此,对于第一个極化光,我們求得 $E=$常数$\cdot E_y\cos\theta$;对于第二个,我們求得 $E=$常数$\cdot E_z$。将其平方,求其平均值,再取其比值,我們得到(因为对于沒有極化的光有 $\overline{E_y^2}=\overline{E_z^2}$):

$$\rho=\cos^2\theta,$$

(θ 是入射光的方向和散射光的方向所夾之角)。

4. 求被运动着的电荷所散射出来的光的频率。

解：在一个坐标系統中，假如电荷在其中是靜止的，光的頻率經过散射后就不改变（$\omega=\omega'$）。这个关系可以写成一个不变式的形式如下：

$$k'_i u_i = k_i u_i,$$

式中，u_i是电荷的四度速度。从此不难求出

$$\omega'\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta'\right)=\omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right),$$

式中，θ和θ'是入射波和散射波与运动方向所夹之角（v是电荷的速度）。

5．一个綫性極化波被一个沿波傳播方向运动的（速度为v）电荷散射，求散射的角度分布。

解：散射的强度由（9-75）来决定，在其中，粒子的加速度$\mathbf{W}$必須用入射波的場$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$来表示（按照§3-2的習題中所得的各公式）。在这样作时，必須記着$\mathbf{V}$是垂直于$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$的。用入射波的坡印廷矢量除强度dI，我們得到有效散射截面如下：

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^6}\left[\left(1-\frac{v}{c}\sin\theta\cos\varphi\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cos^2\theta\right],$$

式中，θ和φ是方向$\mathbf{n}$的極角和方位角，这是对这样一个坐标系統而言的，在其中，Z軸沿着$\mathbf{E}$的方向，X軸沿着$\mathbf{V}$的方向[$\cos(\mathbf{n},\mathbf{E})=\cos\theta$；$\cos(\mathbf{n},\mathbf{V})=\sin\theta\cos\varphi$]。

6．求电荷在被它散射的波作用于它的平均力的影响下的运动。

解：力（9-122）是沿着入射波的傳播方向（X軸），因此，我們所考虑的运动的速度也是沿着这个方向，我們选擇一个輔助参考系統K_0，在这个系統中，粒子是靜止的（我們要注意，我們所討論的运动是对于一个微振动的周期平均了的运动）。从（9-122）知道，作用于电荷上的力是$\sigma\overline{W}_0$，而在这个力的作用下，电荷所获得的加速度是

$$w_0=\frac{\sigma}{m}\overline{W}_0,$$

（指标0是对于参考系統K_0而言的）。加速度w和波在原参考系統K中（在这个系統中，电荷以速度v运动着）和能量密度W与w_0和W_0的关系已为§1-7节習題的公式和公式（6-29）所决定。施行这个变换，我們求得

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt}=\frac{\overline{W}\sigma}{m}\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}.$$

将此方程积分，求得

$$\frac{W\sigma}{m}t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}-\frac{2}{3},$$

这就决定了作为时間的隐函数的速度$v=dx/dt$（积分常数是这样选擇的，当$t=0$时，$v=0$）。

7. 一个电荷在电磁場中运动，这个場为沿一切可能向傳播的波的迭加，而傳播方向的分布是各向同性的。求作用于电荷上的平均力。

解：我們将电荷的运动方程写成四度形式

$$mc\frac{du_i}{ds}=f_i.$$

为了决定四度矢量 f_i，我們注意，在电荷于指定瞬間是靜止的參考系統中，在一个單独的波（波沿一定的方向，例如 X 軸，傳播）影响下，运动方程是（$v_x\equiv v$）

$$m\frac{dv}{dt}=\sigma W,$$

（此处我們都略去平均符号）。这就是說，矢量 f_i 的 x 分量必須化为 $\frac{W}{c}\sigma$。四度矢量 $-\frac{\sigma}{c}T_{ik}u_k$ 有这个性質，式中的 T_{ik} 是波的能量-冲量張量，而 u_i 則是电荷的四度速度。此外，f_i 必須滿足 $f_iu_i=0$ 的条件。将形如 αu_i 的四度矢量加到上面的式子上，就可以达到目的；此处的 α 是一个标量。用适当的方法决定 α［比較公式（9-104）］，我們便得到

$$mc\frac{du_i}{ds}=-\frac{\sigma}{c}(T_{ik}u_k+u_iu_ku_lT_{kl}).\tag{1}$$

在一个各向同性的輻射的电磁場中，由于对称性，坡印廷矢量为零，而应力張量 $T_{\alpha\beta}$ 应当有常数 $\delta_{\alpha\beta}$ 的形式。再注意到 $T_{ii}=0$，我們可求出 T_{ik} 的分量

$$T_{\alpha\beta}=\frac{W}{3}\delta_{\alpha\beta},\ T_{\alpha4}=0,\ T_{44}=-W.$$

将此式代入(1)，我們就可求出作用于电荷上的力：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=-\frac{4W\sigma v}{3c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

这个力的作用方向与电荷运动的方向相反；亦即电荷受到了阻尼。我們要注意，当 $v\ll c$ 时，阻尼力与电荷的速度成比例：$m\frac{dv}{dt}=-\frac{4W\sigma}{3c}v$。

8. 一个綫性極化波被一个振子散射，求有效散射截面（考慮輻射阻尼）。

解：我們写出电荷在入射波内的运动方程如下：

$$\ddot{\mathbf{r}}+\omega_0^2\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}+\frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

在阻尼力中，我們可以近似地代入 $\dddot{\mathbf{r}}=-\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$，这时我們得到

$$\ddot{\mathbf{r}}+\gamma\dot{\mathbf{r}}+\omega_0^2\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t},$$

式中，$\gamma=\frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$。由此得到

$$\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}.$$

有效截面　　　　$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.$

§9–12. 低頻率波的散射

电荷体系对电磁波的散射与一个靜止电荷对电磁波的散射之間的区别首先在于这个事实，即由于电荷在体系内具有本征运动，散射波的頻率可能与入射波的頻率不同 就是說，在散射波的光譜分解中，除了入射波的頻率外，还可能出現形如 $\omega'=\omega+\sum_l \omega^{(l)}n^{(l)}$ 的頻率，(式中，$\omega^{(l)}$ 是体系中粒子的多周期运动的基本頻率，而 $n^{(l)}$ 則是任意整数；見第 138 頁的脚注)。改变頻率的散射称为不相参散射(或称組合散射)，它和不改变頻率的相参散射不同。

假設入射波的場是弱的，則我們可以将电流密度写成 $\mathbf{j}=\mathbf{j}_0+\mathbf{j}'$，此处的 $\mathbf{j}_0$ 是沒有外場时的电流密度，而 $\mathbf{j}'$ 則是在入射波作用下的电流变化。与之相应，体系的場的矢势(以及其他的量)也有 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}'$ 的形式，此处的 $\mathbf{A}_0$ 和 $\mathbf{A}'$ 由电流 $\mathbf{j}_0$ 和 $\mathbf{j}'$ 决定。显然，$\mathbf{A}'$ 描述这个电荷体系所散射的波。

現在讓我們来考慮一个波的散射，这个波的頻率 ω 比电荷体系所有的固有頻率都小很多。这个散射将包含不相参部分和相参部分，但是我們在此将只考慮相参散射。为了計算散射波的場，在頻率 ω 十分低的情况下，我們总可以用推迟势的展开式，这个展开式已經在 §9–2 和 §9–5 中介紹过了，即使体系内粒子的速度比起光速来并不算小，这也是可以的。事实上，要使积分

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{c}}\,dV$$

的那个展开式成立，仅仅只須要时間 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}/c\sim a/c$ 比电流分布有显著改变的时間間隔 $1/\omega$ 小很多；对于足够低的頻率($\omega\ll a/c$)，不

管体系內粒子的速度怎样，这个条件都可以滿足。

从展开式的第一項得

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2R_0}\{\ddot{\mathbf{d}}'\times\mathbf{n}+(\ddot{\mathfrak{m}}'\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}\},$$

式中 $\mathbf{d}'$, $\mathfrak{m}'$ 分别是体系的偶極矩和磁矩的一部分，这部分是由落在体系上的輻射所产生的。展开式的以后各項包含比二阶更高的时間导数，我們将它們略去。

散射波的場的光譜分解的分量 $\mathbf{H}'_\omega$（其頻率与入射波的頻率相等）为这个同一公式所決定，但公式中应将所有的量代以它們的傅里叶分量；$\ddot{\mathbf{d}}'_\omega=-\omega^2\mathbf{d}'_\omega$，$\ddot{\mathfrak{m}}'_\omega=-\omega\mathfrak{m}'_\omega$。这样，我們得到

$$\mathbf{H}'_\omega=\frac{\omega^2}{c^2R_0}\{\mathbf{n}\times\mathbf{d}'_\omega+\mathbf{n}\times(\mathfrak{m}'_\omega\times\mathbf{n})\}. \qquad (9\text{-}123)$$

場的展开式的更后面的項給出与小頻率的較高次幂成比例的量。假如体系中所有粒子的速度都很小（$v\ll c$），那么，在（9-123）式中第二項与第一項比較起来就可以略去了，因为磁矩包含 v/c。这时，

$$\mathbf{H}'_\omega=\frac{1}{c^2R_0}\omega^2\mathbf{n}\times\mathbf{d}'_\omega. \qquad (9\text{-}124)$$

假如体系的总电荷为零，那么，当 $\omega\to0$ 时，$\mathbf{d}'_\omega$ 和 $\mathfrak{m}'_\omega$ 趋近于常数極限（假如总电荷不为零，那么，当 $\omega=0$ 时，就是說在恒定場中，这个体系开始作整体运动）。因此，对于低頻率（$\omega\ll v/c$）我們可以認为 $\mathbf{d}'_\omega$ 和 $\mathfrak{m}'_\omega$ 与頻率无关。由此可見，散射波的場与頻率的平方成比例。因此場的强度与 ω^4 成比例。所以，当低頻率波被散射时，相參散射的有效截面与入射波頻率的四次幂成比例[1]。

§9-13. 高頻率波的散射

我們来研究波被电荷体系的散射，假如波的頻率 ω 比体系的

---

[1] 这也适用于光被离子的散射，也适用于光被不帶电的原子的散射。因为核子的質量較大，由离子作为整体的运动而發生的散射可以略去不計。

基本固有頻率大很多。后者的数量級为 $\omega_0\sim v/a$，所以 ω 应当滿足条件

$$\omega\gg\omega_0\sim\frac{v}{a}. \tag{9-125}$$

此外，我們假設体系中电荷的速度很小($v\ll c$)。

按照条件(9-125)，体系中电荷的运动周期比波的周期大很多。因此，在一个与波的周期同数量級的时間間隔內，体系中电荷的运动可以看作是均匀的。这就是說，在研究短波的散射时，我們无須考慮体系的电荷彼此之間的相互作用，即我們可以将电荷認为是自由的。

因此，在計算电荷在入射波的場內所得到的 $\mathbf{V}'$ 时，我們可以将体系中每个电荷分开来考慮，并把电荷的运动方程写为

$$m\frac{d\mathbf{V}'}{dt}=e\mathbf{E}=e\mathbf{E}_0e^{-i(\omega t-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r})},$$

式中，$\mathbf{k}_1=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}_1$ 是入射波的波矢量。电荷的矢徑当然是时間的函数。在这个方程右边指数因子的指数中，第一项的时間变化率比第二項大很多(第一項的时間变化率为 ω，而第二項的数量級是 $k_1v\sim\frac{v\omega}{c}\ll\omega$)。所以，在积分运动方程时，我們可以将 $\mathbf{r}$ 那部分当作常数。因此，

$$\mathbf{V}'=-\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0e^{-i(\omega t-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r})}. \tag{9-126}$$

对于散射波的矢势(在与体系相距甚远之处)，按照一般公式(9-2)，我們有

$$\mathbf{A}'=\frac{1}{cR_0}\int\mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2}{c}}dV=\frac{1}{cR_0}\sum(e\mathbf{V}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2}{c}},$$

式中，求和应該对体系中所有的电荷进行；$\mathbf{n}_2$ 是散射方向的單位矢量。将(9-126)代入，我們便求得

$$\mathbf{A}'=-\frac{1}{icR_0\omega}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\mathbf{E}_0\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \tag{9-127}$$

式中，$\mathbf{q}=\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2$ 是入射波的波矢量 $\mathbf{k}_1$ 和散射波的波矢量 $\mathbf{k}_2=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}_2$ 之差(严格地說，波矢量 $\mathbf{k}_2=\frac{\omega'}{c}\mathbf{n}_2$, 此处的 ω' 是散射波的頻率，它可能与 ω 不同，然而在散射中，頻率的改变与 ω_0 同数量級，就是說，在我們所考慮的情形下，这个改变比 ω 本身小很多，因此 $\mathbf{k}_2$ 的改变可以略去)。在(9-127)式中的和应当取在 $t'=t-R_0/c$ 瞬間时的值(为簡單起見，如平常一样，略去 $\mathbf{r}$ 上的指标 t')；由于粒子速度很小的假設，$\mathbf{r}$ 在时間 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}_2/c$ 内的变化也可以略去。

对于散射波的場 $\mathbf{H}'$, 我們按照(9-3)求得

$$\mathbf{H}'=\frac{\mathbf{n}_2\times\mathbf{E}_0}{c^2R_0}e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \qquad (9\text{-}128)$$

射入 $\mathbf{n}_2$ 方向立体角元內的能量通量是

$$\frac{c|\mathbf{H}'|^2}{4\pi}R_0^2\,do=\frac{1}{4\pi c^3}(\mathbf{n}_2\times\mathbf{E}_0)^2\left|\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\right|^2.$$

用入射波的能量通量 $\frac{c}{4\pi}E_0^2$ 除上式，并用 θ 代表入射波的場 $\mathbf{E}$ 与散射方向的夹角，最后我們得到有效散射截面如下：

$$d\sigma=\overline{\left|\sum\frac{e^2}{mc^2}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\right|^2}\sin^2\theta\,do. \qquad (9\text{-}129)$$

式中的一横表示对时間的平均值，亦卽对体系中电荷的运动的平均值；因为散射是在一个时間間隔內观察的，这个时間間隔比体系中电荷的运动周期大很多，所以有时間的平均值。

对于入射輻射的波長，从条件(9-125)得到不等式 $\lambda\ll\frac{c}{v}\cdot a$。至于 λ 和 a 的相对值，那么两种極限情形 $\lambda\gg a$ 和 $\lambda\ll a$ 都是可能的。在这两种情形下，普遍公式(9-129)簡化很多。

在 $\lambda\gg a$ 的情形下，在(9-129)式中，$\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}\ll1$, 因为 $q\sim1/\lambda$, 而 $\mathbf{r}$ 与 a 同数量級。与此相应，我們用 1 代替 $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$, 从而得到

$$d\sigma=\left(\sum\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\,do. \qquad (9\text{-}130)$$

就特例言之，当波被一个有 Z 个电子的原子散射时，

$$d\sigma=\left(\frac{Ze^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\,do, \tag{9-131}$$

就是說，散射与原子序数的平方成比例(在(9-130)的和中，与原子核相应的項可以略去，因为核的質量比电子的質量大很多)。

現在轉到 $\lambda\ll a$ 的情形，在(9-129)中的和的平方中，除了每項的模的平方 $(e^2/mc^2)^2$ 以外，还有如下形式的乘积：

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{e'^2}{m'c^2}e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}.$$

在对电荷的运动求平均值时，亦即在对它們在体系中的相互位置求平均值时，$\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ 可取与 a 同数量級的一个間隔內的一切值。既然 $q\sim1/\lambda$, $\lambda\ll a$, 那么，指数因子 $e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$ 是一个在这个間隔內振动得很快的函数，而它的平均值就化为零。因此，当 $\lambda\ll a$ 时，有效散射截面

$$d\sigma=\sum\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\,do. \tag{9-132}$$

就特例言之，当被原子散射时，在这种情形下，我們有

$$d\sigma=Z\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\,do, \tag{9-133}$$

就是說，散射与原子序数的一次方成比例。我們注意到，公式(9-132)和(9-133)对于小的散射角(与 λ/a 同数量級)不能应用，因为在这种情形下，q 已經不再是大的量了，因而指数 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}$ 不比 1 大很多。

为了求出相參散射的有效截面，我們必須将散射波的場的頻率为 ω 的那一部分分开来。場的表示式(9-128)通过因子 $e^{-i\omega t}$ 与时間發生关系，而且也通过 $\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}(t)}$ 与时間發生关系。后面这个关系使得在散射波的場內，除了頻率 ω 以外，还含有別的頻率(虽然与 ω 很接近)。假如我們将 $\sum\frac{e^2}{m}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ 对时間求平均值，

(即对电荷的运动求平均值),那么,显然我們可以得到频率为 ω 的那一部分場(就是仅通过因子 $e^{-i\omega t}$ 与时間發生关系的那一部分場。与此相应，相参散射有效截面 $d\sigma_{相参}$ 与总截面 $d\sigma$ 的不同之处就在于前者包含和的平均值的模的平方

$$d\sigma_{相参}=\left|\overline{\sum \frac{e^2}{mc^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}\right|^2 \sin^2\theta\, do, \tag{9-134}$$

而后者則包含和的模的平方的平均值。

在 $\lambda \gg a$ 的情形下，我們再次用 1 来代替 $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$，于是

$$d\sigma_{相参}=\left(\sum \frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do. \tag{9-135}$$

将此式与总有效截面(9-130)式相比較,我們看出 $d\sigma_{相参}=d\sigma$, 就是說,所有的散射都是相参的。

假如 $\lambda \ll a$, 那么，当我們求平均值时，在(9-134)中所有和的項(是迅速振动的时間函数)都消失了,从而 $d\sigma_{相参}=0$。因此,在这种情形下,散射完全是非相参的。

第十章　引力場中的粒子

§10-1. 非相对論力学中的引力場

除了电磁場以外，自然界中还存在另一种場，卽所謂重力場或引力場。这种場具有以下的基本特性：所有的物体，不管質量或所带电荷的大小，只要有相同的起始条件，它們在場中就将以相同的方式运动。例如，对于在地球引力場中的所有物体自由降落的規律都是一样的，卽不管它們的質量如何，都获得同一的加速度。

引力場的这个特性使我們有可能建立两种运动的重要的类似性，一种运动是一个物体在引力場中的运动；另一种运动是一个物体不在任何外場中的运动，但这是从一个非慣性参考系統的观点来看的。实际上，在一个慣性参考系統中，所有物体的自由运动都是勻速直綫运动；假如在开始时，它們的速度是一样的，那么无論在任何时候都将保持一样。因此，很显然，假如我們考虑在一給定的非慣性系統中的自由运动，那么，相对于这个系統，所有的物体都以同样的方式运动。

因此，在一个非慣性系統中的运动特性与在一个有引力場存在的慣性系統中的运动特性一样；換句話說，非慣性系統与某一引力場等价。这种情况称为等价原理。

我們来研究，例如，在作勻加速运动的参考系統中的运动。假如一个任意質量的物体在这样的参考系統中作自由运动，很显然，这个物体对于这个系統就有一个同样的不变的加速度，这个加速度与系統本身的加速度大小相等，方向相反。这也可以应用到在

均匀恒定引力場，例如地球的引力場中的运动(在不大的区域内，地球的引力場可以当作是均匀的)。因此，一个作匀加速运动的参考系統与一个不变的、均匀的外場等价。更一般的情形是作变速直綫运动的参考系統，显然，这种系統与一个均匀的但是是变化着的引力場等价。

然而必須着重指出，与非慣性参考系統等价的場实际上并不完全与在慣性系統中存在的"实在"的引力場一样。例如，它們在无穷远处的性質就有十分重要的差別。在与产生場的物体相距为无穷远处，"实在"的引力場总是趋近于零；与此相反，与非慣性参考系統等价的場在无穷远处却无限制地增大，或者，无論如何，总保持为有限值。例如，在旋轉的参考系統中出現的离心力，当我們从旋轉軸移开时，无限制地增大；一个与作匀加速直綫运动的参考系統等价的場在空間各处都是一样的，而且在无穷远处也一样。

只要我們从非慣性系統过渡到慣性系統，与非慣性系統等价的場就消失了。和这相反，无論选擇那一种参考系統，"实在"的引力場(在一个慣性参考系統內也存在)总是无法消除的。这可以从上面所講的关于"实在"的引力場和与非慣性系統等价的場在无穷远处的情况的差別直接看出，既然后者在无穷远处不趋近于零，那么，无論怎样选擇参考系統，"实在"的場也不可能消除，因为它在无穷远处变为零。

用适当选擇参考系統的方法，唯一可以做到的只是消除在空間的某一給定区域内的引力場，而且这个区域必須如此之小，使其中的場可以当作是均匀的。要作到这点，可选擇一个作加速运动的系統，这个加速度就等于粒子放在我們正在考虑的場的区域内所得到的加速度。

粒子在引力場中的运动，在非相对論力学中为拉格朗日函数所决定，这个函数在慣性参考系統中的表示式是

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi. \tag{10-1}$$

式中，φ 是描述場的特性的坐标和时間的某一函数，称为引力势①。与此相应，粒子的运动方程是

$$\dot{\mathbf{V}} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{10-2}$$

这个方程不包含質量，也不包含任何其他描述粒子特征的常数，它就是在本节开始时所討論的引力場的基本特性的数学表示。

§10-2. 相对論力学中的引力場

在上节中所指出的引力場的基本特性，即所有物体在場中作同样的运动，在相对論力学中也还是有效的。所以，引力場和非慣性参考系統的类似性仍然存在。因此，在研究相对論力学中引力場的特性时，我們自然也从这个类似性出發。

在慣性参考系統中，用笛卡尼坐标，間隔 ds 为

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

所决定。在变换到任何另一个慣性参考系統时（就是說在作洛倫兹变换时），我們知道，間隔保持同样的形式。然而，假如我們变换到非慣性系統，ds^2 将不再是四个坐标的微分的平方和了。

例如，当我們变换到匀速旋轉的坐标系統时，

$$x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t,\quad y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t,$$

$$z = z'$$

（Ω 是旋轉的角速度，其方向沿着 Z 軸），那么，間隔就有下面的形式：

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]\,dt^2 - dx'^2 - dy'^2 -$$
$$- dz'^2 + 2\Omega y'\,dx'\,dt - 2\Omega x'\,dy'\,dt.$$

---

① 以后我們不常用电磁势 φ，因此用同一个符号 φ 来代表引力势不会引起誤解。

不管时間坐标变換的規律怎样，这个式子不可能仍以四个坐标的微分的平方和来表示。

因此，在非慣性参考系統中，間隔的平方是坐标微分的一般形式的二次齐式，也就是說，它有以下的形式：

$$-ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k, \tag{10-3}$$

式中，g_{ik} 是坐标的某些函数，就是說它是空間坐标 x_1, x_2, x_3 和时間坐标 x_0 的函数。因此，假如我們应用非慣性系統，四度坐标 x_0, x_1, x_2, x_3 将是曲綫坐标。

决定每一个曲綫坐标系統中的所有几何特性的量 g_{ik} 确定所謂空間-时間度規。

既然 ds^2 无論如何已經不是平方和了，用虛的时間坐标 $x_4 = ict$ 就失去了意义，所以我們用 x_0(或 ct)来代表实的时間坐标①。

显然，总可以認为 g_{ik} 这些量对指标 i 和 k 来說是对称的(即 $g_{ik}=g_{ki}$)，因为它們是由对称式(10-3)所决定的，此处的 g_{ik} 和 g_{ki} 是作为同一个积 $dx_i\,dx_k$ 的因子出現的。在一般情形下，一共有十个不同的量 g_{ik}；四个有相同的指标和 $4\times3/2=6$ 个有不同的指标。在一个慣性参考系統中，当我們用笛卡兒空間坐标 $x_{1,2,3}=x, y, z$ 和时間坐标 $x_0=ct$ 时，g_{ik} 各量是

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1,\ g_{00}=-1;\ 当\ i\neq k\ 时，g_{ik}=0. \tag{10-4}$$

具有这些 g_{ik} 值的(四度)坐标称为伽利略坐标。

在上一节中已經証明了一个非慣性参考系統与某一引力場等价。現在我們看出，在相对論力学中，这些引力場为 g_{ik} 各量所决定。

这同样可以应用到"实在"的場也有同样的情况。任何引力場恰恰就是空間-时間度規的一个改变，而这个改变是由 g_{ik} 各量所

① 与此相应，以后，凡重复的拉丁字指标都意味着是从 0 到 3 的求和，而重复的希腊字指标就意味着是从 1 到 3 求和。

决定的。这个重要事实說明，空間-时間的几何性質(它的度規)是由物理現象所决定的，而不是空間和时間的固有性質。

建立在相对論基础上的引力場理論称为广义相对論。它是由爱因斯坦提出来的(最后在 1916 年建立)，并且在現有的物理理論中，它或許是最美丽的。突出的地方是爱因斯坦用純推导的方法就建立了这个理論，只有以后才被天文观测所証实。

在非相对論力学中，在"实在"的引力場和与非慣性参考系統等价的場之間有一个根本的差别。当变换到慣性参考系統时，二次齐式(10-3)中的 g_{ik} 各量，可以利用簡單的坐标变换从它們的伽利略値得到。按照这个道理，在慣性参考系統中，g_{ik} 有一个非常特殊的形式，在整个空間中可利用坐标变換化为它們的伽利略値(10-4)。这个形式所以是非常特殊，是因为在一般情况下仅仅只用四个坐标的变換就要使 g_{ik} 的十个量化为預定的形式是不可能的。

用任何坐标变换都不能消除"实在"的引力場；换句話說，在引力場存在时，空間-时間是这样的，不可能用任何坐标变换使决定它的度規的量 g_{ik} 在整个空間都化为它們的伽利略値。将这样的空間-时間称为非欧基里得的空間-时間或弯曲的空間-时間，以区别于欧基里得的或平坦的空間-时間；在平坦的空間-时間中，$-ds^2$ 总可以化为四个微分的平方和。在非欧氏空間中，欧氏几何的普通定律是不成立的①。

在非欧氏空間中，用坐标变换所能做到的是将 g_{ik} 各量在空間-时間的一給定无限小的"体积"元內化为(10-4)式的値(也就是

① 严格地講，要欧氏几何的定律成立，ds^2 就必須是可以化为坐标微分的平方和，其間，在实在的欧氏空間-时間內，ds^2 中三个空間坐标的微分的平方都有相同的符号，而平方 dx_0^2 則有相反的符号(假如我們不引入虛坐标的話)。用二次式 $dx_0^2-dx_1^2-dx_2^2-dx_3^2$ 定义的四度几何有时称为伪欧基里得几何；但是，我們在此并不引用这个名詞(必須指出，在伪欧基里得空間-时間中，純空間几何，即三度几何，仍然是純欧氏的)。

消除引力場)；而在空間-时間的其余部分 g_{ik} 仍然保留为非伽利略值。实际上，在一个无限小的区域内，g_{ik} 可以当作是常数，而每一个以常数为系数的二次齐式都可以化为平方和的形式。我們把这样的坐标系統称为对于一給定点的伽利略坐标系統。

我們注意到在一給定点化为对角形式之后，在 g_{ik} 各量中有一个負的主値和三个正的主値。由此可以断定，由 g_{ik} 各量所构成的行列式 g 在实在的空間-时間中总是負的。

直到現在为止，我們只討論了空間和时間坐标，而沒有考慮如何选擇这些坐标的問題。关于这个問題，广义相对論中坐标系統的观念，与狹义相对論中的不同。在狹义相对論中，我們用彼此之間有固定距离(即彼此相对靜止)的物体的集合作为坐标系統；而在广义相对論中，这是不可能的。实际上，任何引力場的出現，正如我們已經知道的，就意味着空間-时間度規的改变，从而，特别是空間本身的度規若与时間有关，則也要改变，这就使得組成任何系統的物体不可能是彼此相对靜止的①。显然，由此可見，在任何物体系統中，物体之間的相互位置不能認为是不变的。

因此，在广义相对論中，物体彼此相对靜止的观念失去了意义，此外，物体运动的一定的相对速度也失去了意义。

按照这个道理，为了正确地定出物体在有引力場存在的空間中的位置，严格地說，就必須有一个由无穷多物体組成的系統，这些物体充滿整个空間。这样的一个物体系統，加上与每个物体相联系着的一个鐘(这些鐘可以任意地記录时間)，就构成了广义相对論中的参考系統。

---

① 这样的变形之所以不可避免从下面的例子就可以明显地看出来。在非欧氏空間中，圓周与半徑的比值不是 2π，而且一般地說，是随着时間变化的。因此，假如圓的物体的半徑不变，那么，圓周也会發生变化，反之亦然。

§ 10-3. 曲綫坐标

我們已經看到在研究引力場时用曲綫坐标来考慮問題的必要性。因此，就必須發展任意曲綫坐标中的四度几何。从 § 10-3 到 § 10-7, 我們將專門討論这一問題。

讓我們研究从一个坐标系統 x^0, x^1, x^2, x^3, 到另一个坐标系統 x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 的变換：

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

式中，f^i 是某些函数。在变換坐标时，坐标的微分按照下面的关系式变換：

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \tag{10-5}$$

如果任何四个量 $A^i(i=0, 1, 2, 3)$的集合，在坐标变換时象坐标的微分一样地变換，那么，这四个量的集合称为四度逆变矢量。因此，在坐标变換时，

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \tag{10-6}$$

我們將用右上角的指标表示逆变矢量的分量①。

設 φ 是某一标量。在坐标变換时，四个量 $\partial\varphi/\partial x^i$ 按照公式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \tag{10-7}$$

变換，这个公式与公式(10-6)不同。如果四个量的集合 A_i 在坐标变換时象一个标量的导数一样变換，那么，这四个量的集合称为四度协变矢量。因此，在坐标变換时，

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{10-8}$$

① 坐标 x^i 的微分本身構成一个逆变矢量，我們在此和以后都將指标写在坐标字母的右上角，只有当把指标写在右上角感到不方便时，才將它写在右下角[例如我們不写$(x^2)^2$，而写 x_2^2]。

我們用右下角的指标表示协变矢量的分量。

在笛卡兒坐标系統中，协变矢量与逆变矢量沒有区别——变換規律(10-6)和(10-8)在这个情形下是一样的①。

因为在曲綫坐标中出現了两种不同形式的矢量，所以与之相应就有三种不同形式的二阶張量。象两个逆变矢量的分量的乘积一样变換，也就是按照規律

$$A^{ik}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}A'^{lm} \tag{10-9}$$

变換的十六个量的集合称为二阶逆变張量 A^{ik}。同理，我們定义按下式变換的十六个量的集合为协变張量：

$$A_{ik}=\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'_{lm}, \tag{10-10}$$

同时，又定义按下式变換的十六个量的集合为混合張量：

$$A^i_k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'^l_m. \tag{10-11}$$

可以用与此完全类似的方法来定义高阶張量。例如張量 A^m_{ikl} 对于三个指标是协变的，而对于一个指标則是逆变的，其变換規律如下：

$$A^m_{ikl}=\frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}A'^t_{prs}.$$

假如一个張量对任何一对指标（两个指标都是协变的或都是逆变的)来說是对称的或反对称的，那么，在任何坐标系統中它們都保持不变。对于混合張量，例如 A^i_k，对称性和反对称性的概念都沒有意义，因为对于不同的指标有不同的变換規律与其对应，所以当

① 在此只須提出，在笛卡兒坐标中，梯度具有与其他所有矢量相同的特性。变換(10-6)和变換(10-8)的等效性可以形式地驗証如下。从一个笛卡兒坐标到另一个笛卡兒坐标的变換是綫性变換，其形式为 $x^i=\alpha_{ik}x'^k$，此处的 α_{ik} 是常数，滿足所謂正交条件 $\alpha_{il}\alpha_{kl}=\delta_{ik}$。按照公式(10-6)和(10-8)，我們有 $A^i=\alpha_{ik}A'^k$，而 $A'_l=\alpha_{kl}A_k$；用 α_{il} 乘第二个等式，再对 l 求和，我們就得到 $A_i=\alpha_{il}A'_l$，这就是說同 A^i 的变換一样。

我們从一个坐标系統变换到另一个坐标系統时，一般来說，对称性要改变。

假如一个張量（即所有它的分量）在一个坐标系統中为零，那么，它在任何其他坐标系統中也为零。两个同为逆变或同为协变性質的張量之和仍为一个逆变或协变性質的張量。

显而易見，矢量 A_i 和 B_k 的分量的乘积是一个形式为 A_{ik} 的張量，矢量 A_i 和 B^k 的分量的乘积是一个形式为 A_i^k 的張量。而矢量 A_l 和張量 A^{ik} 的乘积是一个形式为 A_l^{ik} 的張量；其余类推。

在笛卡兒坐标中，由任何两个矢量可以造出一个标量（两个矢量的标积）。在曲綫坐标中，我們不可能从任意两个矢量造出一个标量；也就是說，从两个协变或两个逆变矢量不可能造出一个标量。相反地，我們可以从一个逆变矢量 A^i 和一个协变矢量 B_k 造出一个标量；这个标量就是 A^iB_i，并称之为矢量 A^i 和矢量 B_i的标积。利用变换公式（10-6）和（10-8）不难証明，A^iB_i 确实是一个标量。

从两个矢量造出一个标量是下面将要介紹的張量“縮并”法則的一个特例。假如我們有一个張量 $A_{::k::}^{::i::}$，那么 $A_{:i:}^{:i:}$（对 i 求和）也是一个張量，其阶比 $A_{::k::}^{::i::}$ 的低二。因此，例如从張量 A_i^k 可以造出一个标量 A_i^i。实际上，按照（10-11），

$$A_i^i=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A_m'^l=\frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}A_m'^l=A_l'^l,$$

这就是說，A_i^i 的确是一个不变量[①]。同理，A_{ik}^{ik} 和 $A_i^kB_k^i$ 都是标量，以此类推。A_{kli}^{i} 是一个二阶协变張量，$A_k^iB^k$ 是一个逆变矢量，以此类推。

应該注意，按照两个右上角或右下角的指标（例如 A_{kii}^{i}）求和所得的式子并非張量。以后我們不用这些量。

---

① 标量和不变量是同义的名詞。

曲綫坐标中的單位張量就是混合張量 δ^k_i，它的分量当 $i \neq k$ 时等于 0，而当 $i=k$ 时，則等于 1。假如 A^k 是一个矢量，那么，用 δ^i_k 乘之，就得到

$$A^k \delta^i_k = A^i,$$

它仍然是一个矢量；这也証明了 δ^i_k 是一个張量。

綫元的平方 ds^2 是微分 dx^i 的二次函数，也就是

$$-ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \tag{10-12}$$

式中，g_{ik} 是坐标的函数，g_{ik} 对于指标 i 和 k 是对称的，就是說，

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{10-13}$$

既然 g_{ik} 与逆变張量 $dx^i dx^k$ 的积（縮并）是一个标量，那么，g_{ik} 就是一个协变張量。張量 g_{ik} 称为度規張量。

在 § 10-2 中我們已經指出，在实的欧氏空間 时間內，适当选擇坐标系統，張量 g_{ik} 总可以(在一給定点)化为伽利略式

$$g^{(0)}_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10-14}$$

若两个張量 A_{ik} 和 B^{ik} 滿足条件

$$A_{ik} b^{kl} = \delta^l_i,$$

則称这二个張量为互为倒数。

就特例而言，張量 g_{ik} 的倒数称为逆变度規張量 g^{ik}，就是說，

$$g_{ik} g^{kl} = \delta^l_i. \tag{10-15}$$

伽利略張量 $g^{(0)ik}$ 的分量显然与張量 $g^{(0)}_{ik}$ 的分量一样。

在四度笛卡兒坐标系統中，如我們已經指出的，协变矢量与逆变矢量之間幷无差别；然而，当在曲綫坐标时，就有了差别。因此，假如任何物理量在笛卡兒坐标系統中是矢量，那么，当变到曲綫坐标时，它就可以表为两种形式：协变矢量的形式或逆变矢量的形

式。我們用同一个符号代表一个矢量的两个形式，只是用右上角的指标和右下角的指标来区别它們(A^i 和 A_i)。

很容易找出一些公式，用这些公式，我們可以将矢量从协变形式变为逆变形式，或从逆变形式变为协变形式。首先要知道，唯一能决定协变分量和逆变分量的关系的量是度規張量的分量。此外，在笛卡兒坐标系統(就是 $g_{ik}=\delta_{ik}$ 的坐标系統)中，所要求的关系必須化为 $A_i=A^i$[1]。因而，为了用一个协变矢量来表示一个逆变矢量，我們应当用分量 A_i 和度規張量的分量組成一个滿足所提条件的逆变矢量，这样的逆变矢量是

$$A^i=g^{ik}A_k; \tag{10-16}$$

反之，

$$A_i=g_{ik}A^k. \tag{10-17}$$

实际上，在笛卡兒坐标系統中，$g_{ik}=\delta_{ik}$，这些公式給出 $A_i=A^i$，而这正是应該有的。

我們注意，在伽利略坐标中，矢量的协变分量与其逆变分量并不完全一样：

$$A_\alpha=A^\alpha, \quad A_0=-A^0.$$

上面所說的一切也能应用于張量。每个在笛卡兒坐标系統中的張量，在变为曲綫坐标后，可以用許多形式来表示，这許多形式有不同的协变与逆变的特性。我們用带有不同指标的字母来代表

---

[1] 在此以及在其他相似的地方，我們在証明中用了笛卡兒坐标系統，必須記着，只有当空間是欧氏空間时，我們才能引用笛卡兒坐标系統。在非欧氏空間的情况下，我們在証明中可以考虑在一給定的无限小体积元内的笛卡兒坐标，这总是可能的(見 § 10-2)。所有的結論对于非欧氏空間也是相等的。在与此相似的情形中，以后我們为簡便起見常提到笛卡兒坐标系統；必須記住，所有的結果对于非欧氏空間同样可以应用。

必須指出，在真实的空間-时間中，假如我們用实的坐标 x^i，那么，$-ds^2$ 可能化为伽利略形式(仅仅在一給定的无限小的体积元内)，在其中，有三个微分的平方的系数为正，另一个为負。然而，这种情况并不改变这一节和以后各节中的結果，因为从伽利略坐标的变为四度笛卡兒坐标，只須要用 x^0 与 i 的乘积代替 x^0 就行了。

同一張量的不同形式。張量的不同形式之間的变換可以用与矢量变換相类似的方法来完成。因此，

$$A^{i}_{k\,l} = g_{lm}A_{k}^{\,im},\quad A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}, \text{等等.}$$

我們应該注意，假如一个二阶張量不是对称的，那么，我們必須将 $A_k^{\,i}$ 和 $A^{k}_{\,i}$ 加以区別，也就是区别指标是从什么位置升起的。

在笛卡儿坐标系統中，一个矢量的絕对值的平方等于其分量的平方和。显而易見，一个矢量在曲綫坐标中的絕对值的平方也是一个标量，

$$A_iA^i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \tag{10-18}$$

値得指出，在張量的乘积中求和的指标有一些移动的自由。例如，

$$A_{ik}B^{ik} = A^{ik}B_{ik},\quad A_{ik}B^{ik} = A^{k}_{i}B^{i}_{k}, \text{等等.}$$

只要一个指标在一个因子中降低就可以在另一因子中将同一指标升高（利用張量的协变分量和逆变分量之間的借張量 g_{ik} 来实現的联系，很容易証实这一点）。

在 § 1-6 中，我們定义了（在笛卡儿坐标系統中）完全反对称的單位贋張量 e_{iklm}。我們現在来改变它，使它适合于任意的曲綫坐标系統。首先我們注意，从 e_{iklm} 的定义，对于一个任意張量 k_{ik}，我們可以写出：

$$e_{nrst}k_{ni}k_{rk}k_{sl}k_{tm} = ke_{iklm}, \tag{10-19}$$

式中，k 是由 k_{ik} 各量构成的行列式。事实上，行列式的个别的項是这样得来的：按每行取一个（于是 $n\neq r\neq s\neq t$）和每列取一个（于是 $i\neq k\neq l\neq m$）的原則选取四个原素；它們乘积的正負号是这样决定的，当行的秩序变为与列的秩序一样时，看換位的次数是单数还是双数，双数就給予正号，单数就給予負号。

按照張量变換的普遍法則并利用(10-19)式，当过渡到曲綫坐标时，我們有

$$e_{iklm}=e'_{nrst}\frac{\partial x'^n}{\partial x^i}\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\frac{\partial x'^t}{\partial x^m}=e'_{iklm}J, \tag{10-20}$$

其中
$$J=\frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$
是从坐标 x^i 到 x'^i 的雅可毕变換式。这个雅可毕变換式可以用由張量 g'_{ik} 构成的行列式 g' 来表示。我們要注意，旣然在笛卡儿坐标系統中，$g_{ik}=\delta_{ik}$，那么，按照变換公式，

$$\delta_{ik}=g'_{lm}\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}.$$

比較这个方程两边的量所构成的行列式，我們得到 $1=g'J^2$，卽 $\sqrt{g'}=1/J$；然而我們以后在平方根內总写 $-g$，因为实际上对于所有与眞实的空間-时間相联系的坐标，行列式 g 是負的(見§10-2)。从(10-20)式，我們現在得到

$$e'_{iklm}=\sqrt{-g'}e_{iklm}.$$

因此，在曲綫坐标中，四阶反对称的单位張量必須如下定义：

$$E_{iklm}=\sqrt{-g}e_{iklm}.$$

将張量 $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$ 的指标升高，不难証明四阶反对称的逆变单位張量是

$$E^{iklm}=\frac{1}{\sqrt{-g}}e_{iklm}.$$

在笛卡儿坐标系統中，一个标量对 $d\Omega=dx^0dx^1dx^2dx^3$ 的积分仍是一个标量，这就是說 $d\Omega$ 在积分中具有不变量的特征(見§1-6)。在变換到曲綫坐标 x'^i 时，积分元 $d\Omega$ 变为 $d\Omega'/J=\sqrt{-g'}\,d\Omega'$。因此，在曲綫坐标中，在四度空間的某一区域內积分时，$\sqrt{-g}d\Omega$ 具有不变量的特征[1]。

---

① 假如 φ 是一个标量，那么，量 $\sqrt{-g}\varphi$ 在对 $d\Omega$ 积分时給出一个不变量，这个量有时称为标量密度。类似地，我們称 $\sqrt{-g}A^i$、$\sqrt{-g}A^{ik}$ 为矢量密度和張量密度，等等。这些量在一个无限小的四度体积上积分时，給出相应的矢量或張量；在一个有限区域內所取的积分 $\int A^i\sqrt{-g}\,d\Omega$ 一般說来不是一个矢量，因为矢量 A^i 的变換規律在区域內的不同点是不同的。

在 § 1-6 末关于在超曲面上的积分元曲面上的积分元的曲綫上的积分元等的講述对于曲綫坐标也保持有效，只有一点例外，即对偶張量的定义有些改变。由三个无限小綫段所构成的超曲面的“面积”元是一个逆变反对称張量 dS^{ikl}; 与其对偶的矢量可用張量 $\sqrt{-g}\,e_{iklm}$ 乘之得到，即等于

$$\sqrt{-g}\,dS_i=\frac{1}{6}e_{klmi}\,dS^{klm}\sqrt{-g}. \tag{10-21}$$

同理，假如 df^{ik} 是一个(两度的)面元，并且是由两个无穷小的綫段构成，那么，与其对偶的張量就由下式給出:

$$\sqrt{-g}\,df^*_{ik}=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,e_{iklm}\,df^{lm}. \tag{10-22}$$

我們象以前一样在此用 dS_i 和 df^*_{ik} 分别代表 $\frac{1}{6}e_{klmi}\,dS^{klm}$ 和 $\frac{1}{2}e_{iklm}\,df^{lm}$ (不是它們与 $\sqrt{-g}$ 的乘积); 各种积分彼此变换的法則(1-35)—(1-37)也一样，因为它們的推导具有純形式的性質，而与相应的量的張量性質无关。它們之中，有一个变换法則是特别需要的，这就是将在一个超曲面上的积分变换为在一个体积上的积分的变换法則(高斯定理)，这个变换可以用下面的替换来实現:

$$dS_i\to d\Omega\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{10-23}$$

§ 10-4. 距离与时間間隔

我們已經說过，在广义相对論中，对于坐标系統的选擇并未加任何限制；三个空間坐标 x^1, x^2, x^3 可以是决定物体在空間中的位置的任何量，而时間坐标 x^0 則可以用一个任意行走的鐘来确定。因此就有这样一个問題发生，即如何用 x^1, x^2, x^3, x^0 这些量的值来表示实在的距离和时間間隔。

首先，我們找出固有时(以后，我們用 τ 来代表它)与坐标 x^0 的关系。为此，我們来考慮在空間的同一点发生的两个无限近的事

件。如我們所知道的，两个事件的間隔 ds 恰恰是 $cd\tau$，此处的 $d\tau$ 是两个事件之間的固有时間隔。因此，在普遍式子 $-ds^2=g_{ik}dx^idx^k$ 内，設 $dx^1=dx^2=dx^3=0$，我們便求得

$$ds^2=-c^2d\tau^2=g_{00}dx_0^2,$$

从而，
$$d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}dx^0; \tag{10-24}$$

在空間的同一点发生的任意两个事件之間的时間

$$\tau=\frac{1}{c}\int\sqrt{-g_{00}}dx^0. \tag{10-25}$$

这个关系式决定相应于坐标 x_0 的变化的固有时間隔（或称对于空間的一給定点的固有时間隔）。我們注意到，从这些公式可以看出，量 g_{00} 是負的，即

$$g_{00}<0. \tag{10-26}$$

必須强調指出下面两个条件意义的差别，即条件（10-26）和張量 g_{ik} 的主値有三个必須为正而有一个必須为負（見第 192 頁）的条件。一个不滿足第二个条件的張量 g_{ik} 一般不能与任何眞实的引力場相应，也就是說它不能是一个眞实的空間-时間的度規。不滿足条件（10-26）只表明相应的参考系統不能用眞实的物体来实现，假如这时加在主値上的条件被滿足了，那么一个适当的坐标变换可以使 g_{00} 为負（旋轉坐标系統就是这种系統的一个例子，見§10-11）。

現在我們来求空間距离元 dl。在狹义相对論中（§1-2），我們可定义 dl 为两个在同一时間发生的而相距为无限近的事件間的間隔。在广义相对論中，这在通常的情况下是不可能的，就是說，簡单地使在 ds 中的 $dx^0=0$ 来决定 dl 是不可能的。这是因为在引力場中，对于空間的不同点，固有时与坐标 x^0 有不同的关系。

为了求 dl，現在我們进行如下。假設一个光信号从空間的一給定点跑向相距无限近的另一点，然后又沿原路回去。显然（从

空間的一点观察，为此所必需的时間乘以 c 是两点間的距离的两倍。我們写出間隔，并将时間坐标和空間間隔分开：

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{00}dx_0^2, \qquad (10\text{-}27)$$

在此，不言而喻，对于任何重复的希腊字母指标，我們都从 1 到 3 求和。代表信号从一点出发和代表該信号到达另一点的两个事件的間隔，如我們所知道的，应該为零。命 $ds^2=0$，我們求得信号从第一点到第二点的傳播时間为

$$dx_0^{(1)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right\}$$

（我們选擇了方程 $ds^2=0$ 的正根）。对于信号从第二点到第一点的反运动，"时間" $dx_0^{(2)}$ 将由这同一公式所决定，不过这时必須改变所有 dx^α 的符号，就是說

$$dx_0^{(2)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right\}$$

因此，信号从某一点出发而又回到該点的"时間"間隔等于

$$dx_0^{(1)} + dx_0^{(2)} = -\frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}.$$

按照(10-24)，将上式乘以 $\sqrt{-g_{00}}/c$，就得到相应的固有时間隔，再乘以 $c/2$，就得到两点間的距离 dl。結果，我們得到

$$dl^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta.$$

这就是所要求的用空間坐标元来确定距离的式子。我們把它改写如下：

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \qquad (10\text{-}28)$$

其中，

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \qquad (10\text{-}29)$$

是三度度規張量，它决定空間的度規，亦即决定空間的几何性

質[①]。

关系式(10-29)联系实在的空間的度規和四度的空間-时間的度規[②]。

然而，我們必須記着，g_{ik} 一般与 x^0 有关，因而，空間度規(10-28)也随着时間变化。根据这个理由，将 dl 积分就沒有意义；这个积分与空間中給定的两点間的世界綫(沿着它积分)有关。因此，一般来說，在广义相对論中，物体間的一定的距离的概念失掉了意义，仅仅对于无限小的距离还保持有效。只有在 g_{ik} 与时間无关的情形下，沿着一条空間曲綫的积分 $\int dl$ 有一定的意义，这时才能在空間的一个有限区域内給距离下定义。

現在我們再来討論广义相对論中的"同时"概念的定义，換句話說，我們討論在空間不同点的鐘能否同步的問題，也就是这些鐘的对时問題。

設有一个信号从某一点 B 出發，向相距为无限近的 A 点行进，

---

① 我們注意，張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 是逆变三度張量 $g^{\alpha\beta}$ 的倒数。事实上从 $g^{ik}g_{kl}=\delta^i_l$，我們有(就特例而言)

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}+g^{\alpha 0}g_{0\gamma}=\delta^\alpha_\gamma,\quad g^{\alpha\beta}g_{\beta 0}+g^{\alpha 0}g_{00}=0.$$

从第二个等式求出 $g^{\alpha 0}$，并代入第一个等式，就得到 $g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma$，这就是所要証明的。

我們也要指出，用 g_{ik} 和 $\gamma_{\alpha\beta}$ 組成的行列式 g 和 γ，彼此之間有 $g=g_{00}\gamma$ 的关系存在。

② 二次齐式(10-28)显然必須是正定式。为此，从二次齐式的理論我們知道，为此它的系数必須滿足下列各条件：

$$\gamma_{11}>0,\qquad \begin{vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{vmatrix}>0,\qquad \begin{vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33}\end{vmatrix}>0.$$

很容易証明，若用 g_{ik} 表示 γ_{ik}，則这些条件就表示为如下的形式：

$$\begin{vmatrix}g_{00} & g_{01}\\ g_{10} & g_{11}\end{vmatrix}<0,\qquad \begin{vmatrix}g_{00} & g_{01} & g_{02}\\ g_{10} & g_{11} & g_{12}\\ g_{20} & g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}<0,\qquad g<0.$$

这些条件，連同条件(10-26)在一起，必須使張量在每个参考系統中的分量都滿足，这些参考系統可以用实在的物体来得到。

然后立即又从 A 点返回到 B 点。信号从 B 傳播到 A，又从 A 傳播到 B 的“时間”分别等于 $dx_0^{(2)}$ 和 $dx_0^{(1)}$，这是上面已經确定了的，此处的距离是从 A 点到 B 点的距离。假如 x^0 是信号到达 A 点的瞬間，那么，信号从 B 点出发的瞬間是 $x^0-dx_0^{(2)}$，而信号回到 B 点的瞬間就是 $x^0+dx_0^{(1)}$。显然，我們必須在認为信号到达 A 点与在 B 点的鐘于信号出发和信号回来的二瞬間的中間的指示同时。換句話說，在 A 点的瞬間 x^0 和在 B 点的瞬間 $x^0+\Delta x^0=x^0+\frac{dx_0^{(1)}-dx_0^{(2)}}{2}$ 是同时的。利用上面已經求出的 $dx_0^{(1)}$ 和 $dx_0^{(2)}$ 的表示式，对于两个发生在相距为无限近的二点的同时事件，其“时間” x^0 之差值可以写成如下形式：

$$\Delta x^0=-\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}. \tag{10-30}$$

这个关系使我們能够在空間的任何无限小的体积內来校准鐘。从 B 点繼續作类似的校准，我們可以沿任何（非閉合的）曲綫校准不同的鐘，也就是說我們能够确定事件的同时性。

然而，假如我們沿着任何閉合路徑来校准时間，那么，結果証明是不可能的。事实上，沿着閉合路徑行进，又回到原来出发的那一点，一般地說，对于 Δx^0 我們得到一个不等于零的值。要在整个空間中校准时間尤其是不可能的；也就是說，在广义相对論中，事件的同时性不仅在不同的参考系統中有不同的意义，正如在狹义相对論中一样，而且，一般地說，甚至要在一个单独的参考系統中来确定它也是不可能的。只有在 $g_{0\alpha}$ 各量都为零的参考系統中才有可能来校准鐘（在某参考系統中，只要适当地选擇坐标 x^0，是能够使 $g_{0\alpha}$ 各量都为零的）。

最后，假如我們考慮在空間的某一点上发生的两个事件的固有时間隔，并且考慮在空間的另一点上同时发生的两个事件的固有时間隔，那么，一般地說，这两个时間間隔是不相等的；这就是

說，固有时在空間的不同点消逝的快慢不一样。在沒有引力場出現时，鐘的速率仅与参考系統的选擇有关；而在广义相对論中，甚至在同一个参考系統中，鐘的速率在空間的不同点也是不同的。

§10-5. 协变微分

在笛卡儿坐标系統中①，矢量 A_i 的微分 dA_i 仍然是矢量，而矢量的分量对坐标的导数 $\partial A_i/\partial x^k$ 构成一个張量。在曲綫坐标中就不是这样；dA_i 不是矢量，$\partial A_i/\partial x^k$ 不是張量。这是由于 dA_i 是在空間不同点（相距无限近）的矢量差，而在这些空間不同点上，矢量的变换是不同的，因为变换公式(10-6)，(10-8)中的系統是坐标的函数。

这些都不难直接証明。为此，我們求微分 dA_i 在曲綫坐标中的变换公式。一个协变矢量是按照公式

$$A_i=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}A'_k$$

变换的，因而

$$dA_i=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}dA'_k+A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}=\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}dA'_k+A'_k\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i\partial x^l}dx^l.$$

因此，dA_i 根本不象矢量一样变换（逆变矢量的微分当然也是这样）。仅仅当二次导数 $\partial^2 x'^k/\partial x^i\partial x^l=0$ 时，即当 x'^k 是 x^k 的一次函数时，变换公式有以下的形式：

$$dA_i=\frac{\partial x'^k}{\partial x'^i}dA'_k,$$

就是說象矢量一样变换。

現在我們研究張量的定义，这个張量在曲綫坐标內所起的作用，正如 $\partial A_i/\partial x^k$ 在笛卡儿坐标中所起的作用一样，換句話說，我們应当将 $\partial A_i/\partial x^k$ 从笛卡儿坐标变換到曲綫坐标中去。

---

① 在直綫斜坐标中也一样；一般地說，只要 g_{ik} 是常数就可以。

在曲綫坐标中，为了得到矢量的微分，而这个微分要有矢量的特性，那么，两个相减的矢量就必須在空間的同一点。换句話說，我們必須用某一个方法将彼此相距无限近的两个矢量中的一个"移"到第二个矢量所在之点，在此之后，我們求两个矢量的差，現在这两个矢量是屬于空間的同一点的。这个移动的运算的本身必須如此定义，使这个差在笛卡兒坐标中与普通微分 dA_i 相合。既然 dA_i 不过是两个相距无限近的矢量的分量之差，那么，这就是說，当我們用笛卡兒坐标时，矢量的分量經过移动的运算不改变。但是，这样的移动正是矢量与它自己平行的移动。当矢量作平行移动时，它在笛卡兒坐标① 中的分量不变；假如应用曲綫坐标，那么，一般来說，在这样移动时，矢量的分量要改变。因此，在曲綫坐标中，在将一个矢量平移到另一点以后，两个矢量的分量之差与移动前两者之差(即微分 dA_i)不相等。

所以，为了比較两个相距无限近的矢量，我們应当将其中之一平移到第二个矢量的所在点。讓我們考虑一个任意的逆变矢量；假如它在 x^i 点的值是 A^i，那么，在邻近之点 x^i+dx^i，它的值就是 A^i+dA^i。我們将矢量 A^i 作无限小的平移，移到 x^i+dx^i 点，这时矢量的变化用 δA^i 来表示現在位于同一点的两个矢量之差用 DA^i 来表示，則 DA^i 等于

$$DA^i=dA^i-\delta A^i. \qquad (10\text{-}31)$$

一个矢量的分量的变化 δA^i 在作无限小的平移时，与分量本身的值有关，同时这个关系显然应当是綫性的。这点可以直接从下述事实来推断，即两个矢量之和必須按照每个矢量的变换规則来变换。因此，δA^i 有下面的形式：

① 我們提請注意，在非欧氏空間中，在所有的推导和定义中，我們必須用一种坐标系統来代替笛卡兒坐标系統，这种系統在每个无限小的区域內是笛卡兒的（更严格的說，就是伽利略的）。

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l, \tag{10-32}$$

式中，Γ^i_{kl} 是坐标的函数，它当然与坐标系統有关，在笛卡兒坐标系統中，$\Gamma^i_{kl}=0$[①]。

由此已可看出，Γ^i_{kl} 各量并不构成一个張量，因为假如在一个坐标系統中一个張量为零，那么，在任何其他坐标系統中它都为零。

在非欧氏空間中，当然不可能使所有的 Γ^i_{kl} 在整个空間中都等于零。我們所能做到的，只是选擇这样一个坐标系統(对于給定点是笛卡兒坐标系統)，在这个系統中，Γ^i_{kl} 在一給定的无限小的区域内变为零[②]。Γ^i_{kl} 各量称为克里斯托非尔符号。除了 Γ^i_{kl} 各量以外，以后我們还要用 $\Gamma_{i,kl}$[③]各量，其定义如下：

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \tag{10-33}$$

反之，

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \tag{10-34}$$

不难建立协变矢量的分量在平移下的变化与克里斯托非尔符号間的关系。为此，我們指出，一个标量在平移时是不变的。就特例而言，两个矢量的标积在平移时是不变的。

設 A_i 和 B^i 是任意的协变和逆变矢量，则从 $\delta(A_iB^i)=0$，我們有

$$B^i\delta A_i = -A_i\delta B^i = \Gamma^i_{kl}B^kA_idx^l,$$

交换指标可得

$$B^i\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_kB^idx^l.$$

由于 B^i 的任意性，由此可得

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_kdx^l, \tag{10-35}$$

① 在任何直綫斜坐标中，Γ^i_{kl} 也等于零。

② 以后在 §10-6 中可以知道，Γ^i_{kl} 可以用度規張量 g_{ik} 的一次导数来表示。还可以証明，我們能够选擇一个坐标系統，对于这个坐标系統，g_{ik} 的一次导数在某一給定点为零(g_{ik} 的二次导数不为零)，而 Γ^i_{kl} 也为零。

③ 有时用符号 $\left\{{kl \atop i}\right\}$ 和 $\left[{kl \atop i}\right]$ 来代替 Γ^i_{kl} 和 $\Gamma_{i,kl}$。

此式决定协变矢量在平移后的改变。

将（10-32）和 $dA^i=\frac{\partial A_i}{\partial x^l}dx^l$ 代入(10-31)式可得到

$$DA^i=\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{10-36}$$

同理，对于一个协变矢量，可求得

$$DA_i=\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l}-\Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l. \tag{10-37}$$

(10-36)和(10-37)两式中括号内的式子是張量，因为乘以矢量 dx^l 后，其結果是矢量。显然，这样的張量在曲綫坐标中所起的作用正如 $\frac{\partial A^i}{\partial x^k}$ 在笛卡兒坐标中所起的作用一样。这些張量分别称为矢量 A^i 和 A_i 的协变导数。我們用 $A^i_{;k}$ 和 $A_{i;k}$ 来代表它們。因此，

$$DA^i=A^i_{;l}dx^l,\ DA_i=A_{i;l}dx^l, \tag{10-38}$$

而协变导数本身是

$$A^i_{;l}=\frac{\partial A^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{kl}A^k, \tag{10-39}$$

$$A_{i;l}=\frac{\partial A_i}{\partial x^l}-\Gamma^k_{il}A_k. \tag{10-40}$$

在笛卡兒坐标系統中，$\Gamma^i_{kl}=0$，而协变微分化为普通微分。

計算一个張量的协变微分并不困难。为此，我們必須决定这个張量在无限小的平移下的变化。例如，我們来考虑任意一个逆变張量，这个張量是两个逆变矢量之积 A^iB^k。在平移下，按照(10-32)，

$$\delta(A^iB^k)=A^i\delta B^k+B^k\delta A^i=-A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m-B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m.$$

由于这个变换是綫性的，对于任意的張量 A^{ik}，这个变换也应当成立：

$$\delta A^{ik}=-(A^{im}\Gamma^k_{ml}+A^{mk}\Gamma^i_{ml})dx^l. \tag{10-41}$$

将此式代入

$$DA^{ik}=dA^{ik}-\delta A^{ik}\equiv A^{ik}_{\ ;l}dx^l,$$

我們求得張量 A^{ik} 的协变导数 $A^{ik}_{\ ;l}$ 如下:

$$A^{ik}_{\ ;l}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{ml}A^{mk}+\Gamma^k_{ml}A^{im}. \tag{10-42}$$

用完全相似的方法,我們得到混合張量 A^i_k 和协变張量 A_{ik} 的协变导数如下:

$$A^i_{k;l}=\frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}-\Gamma^m_{kl}A^i_m+\Gamma^i_{ml}A^m_k, \tag{10-43}$$

$$A_{ik;l}=\frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l}-\Gamma^m_{il}A_{mk}-\Gamma^m_{kl}A_{im}. \tag{10-44}$$

用类似的方法,可以决定一个任意阶張量的协变导数。这时,我們得到如下的法则: 为了得到張量 $A^{\cdots}_{\cdots}$ 对 x^l 的协变导数,我們在普通导数 $\frac{\partial A^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^l}$ 上,对每个协变指标 $i(A^{\cdots}_{\cdot i\cdot})$ 必須加 $-\Gamma^k_{il}A^{\cdots}_{\cdot k\cdot}$ 一項,而对于每一逆变指标 $i(A^{\cdot i\cdot}_{\cdots})$ 則必須加 $+\Gamma^i_{kl}A^{\cdot k\cdot}_{\cdots}$ 項。

很容易証明,求乘积的协变导数的法则与求乘积的普通导数的法則一样。这时,我們必須将标量 φ 的协变导数了解为普通导数,也就是了解为矢量 $\varphi_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$,这是因为对于一个标量,$\delta\varphi=0$,因此 $D\varphi=d\varphi$。例如,乘积 A_iB_k 的协变导数是

$$(A_iB_k)_{;l}=A_{i;l}B_k+A_iB_{k;l}.$$

假如在协变导数中将表示微分的指标升高,我們就得到所謂逆变导数。因此,

$$A_i^{\ ;k}=g^{kl}A_{i;l},\quad A^{i;k}=g^{kl}A^i_{\ ;l}.$$

我們来証明克里斯托菲尔符号 Γ^i_{kl} 对于下角的指标来說是对称的。既然矢量的协变导数 $A_{i;k}$ 是一个張量,那么,差 $A_{i;k}-A_{k;i}$ 也是一个張量。假設 A_i 是一个标量的梯度,也就是 $A_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$,那么,利用表示 $A_{i;k}$ 的(10-40)式,我們有

$$A_{k;i}-A_{i;k}=(\Gamma^l_{ik}-\Gamma^l_{ki})\frac{\partial\varphi}{\partial x^l}$$

$\left(因为\frac{\partial A_i}{\partial x^k}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^k\partial x^i}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)$。在某一笛卡兒坐标系統中，协变导数化为普通导数，因而，方程式左边的矢量 $A_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ 化为零。但是，旣然 $A_{k;i}-A_{i;k}$ 是一个張量，那么，若它在一个坐标系統中为零，則它在任何坐标系統中也必須为零。因此，我們得到

$$\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}. \tag{10-45}$$

显而易見，我們也可得到

$$\Gamma_{i,kl}=\Gamma_{i,lk}. \tag{10-46}$$

就一般情形来說，一共有四十个不同的 Γ^i_{kl}；对于指标 i 的四个不同值中的每一个値，有十对不同的指标 k 和 l 的值(由 k 和 l 互换所得的两对算作一对)。

我們以写出克里斯托非尔符号从一个坐标系統变换到另一个坐标系統的变换公式作为本节的結束。比較定义协变导数的方程两边的变换規律，并且要求这些規律对于两边都是一样的，就可以得到这些公式。因此，經簡單的計算后可得到

$$\Gamma^i_{kl}=\Gamma'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l}+\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{10-47}$$

从这个公式很明显地可以看出，Γ^i_{kl} 在綫性变换下[这时(10-47)式中的第二項为零]的特性和張量一样。

§ 10-6. 克里斯托非尔符号与度規張量的关系

我們来証明度規張量 g_{ik} 的协变导数等于零。为此，我們注意到，关系式

$$DA_i=g_{ik}DA^k$$

对于矢量 DA_i，和对于任何矢量一样，是成立的。另一方面，$A_i=g_{ik}A^k$，所以

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

同 $DA_i = g_{ik}DA^k$ 比較，并注意到矢量 A^k 是任意的，就可得到

$$Dg_{ik} = 0.$$

由此直接推出，协变导数

$$g_{ik;\,l} = 0. \qquad (10\text{-}48)$$

因此，在协变微分时，g_{ik} 可以当作常数。

要通过度規張量 g_{ik} 来表示克里斯托菲尔符号，我們可以利用方程 $g_{ik;\,l}=0$。为此，按照張量的协变导数的普遍定义(10-44)，我們写出

$$g_{ik;\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

由此，我們可以很容易地求出 $\Gamma_{i,kl}$，例如，用下面的方法。首先我們写出 g_{ik} 的导数值(将指标 i, k, l 交换位置)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl},$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik},$$

$$-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li},$$

取这些方程之和的一半，注意到 $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$，我們就可求得

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \qquad (10\text{-}49)$$

由此我們得到符号 $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$ 的表示式如下:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \qquad (10\text{-}50)$$

这些公式就是我們所要求的用度規張量表示克里斯托菲尔符号的式子。

现在我們来推导对今后有用的縮并克里斯托菲尔符号 Γ^i_{ki} 的表示式。为此，我們計算由張量 g_{ik} 的分量所构成的行列式 g 的微

分 dg；取張量 g_{ik} 的每个分量的微分，乘以其在行列式中的系数，亦即乘以相应的子行列式，就可得到 dg。另一方面，大家知道，与 g_{ik} 互为倒数的張量 g^{ik} 的分量，等于 g_{ik} 的行列式除其子行列式。因此行列式 g 的子行列式等于 gg^{ik}。由此可見，

$$dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^{ik} \tag{10-51}$$

(既然 $g_{ik}g^{ik}=\delta^i_i=4$，那么，$g^{ik}dg_{ik}=-g_{ik}dg^{ik}$)。

从(10-50)式，得到

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

将括号中第一項和第三項的指标 m 和 i 改变位置，我們看出，这两項互相抵消，所以

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

或者，按照(10-51)

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{10-52}$$

写出 $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$ 这个量的表示式是有益的；我們有

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

利用(10-51)，这个式子可以化为

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{10-53}$$

为了以后的各种运算，我們要記住逆变張量 g^{ik} 的导数与 g_{ik} 的导数有以下的关系：

$$g_{il}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m} = -g^{ik}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{10-54}$$

(将 $g_{il}g^{ik}=\delta^k_l$ 微分而得到)。最后我們指出，g^{ik} 的导数可以用 Γ^i_{kl} 諸量来表示，从恒等式 $g^{ik}_{;l}=0$ 直接得出

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk}-\Gamma^k_{ml}g^{im}. \tag{10-55}$$

利用已經求出的公式，我們可以将矢量在曲綫坐标中的广义散度 $A^i_{;i}$ 的表示式写成便利的形式。既然 $A^i_{;k}=\left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k}\right)+\Gamma^i_{lk}A^l$ [見(10-39)式]，那么，

$$A^i_{;i}=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+\Gamma^i_{li}A^l=\frac{\partial A^i}{\partial x^i}+A^l\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

或者，最后，

$$A^i_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^i}. \tag{10-56}$$

对于反对称的張量 A^{ik}，我們来推导 $A^{ik}_{;k}$ 的类似的表示式，和反对称張量 A^{ik}。从(10-42)，我們有

$$A^{ik}_{;k}=\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{mk}A^{mk}+\Gamma^k_{mk}A^{im}.$$

但是既然 $A^{mk}=-A^{km}$，所以

$$\Gamma^i_{mk}A^{mk}=-\Gamma^i_{km}A^{km}=0.$$

以(10-52)式代替 Γ^k_{mk}，結果我們得到

$$A^{ik}_{;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{ik})}{\partial x^k}. \tag{10-57}$$

現在假設 A_{ik} 是对称張量；我們来計算它的混合分量 $A^k_{i;k}$ 的表示式。我們有

$$A^k_{i;k}=\frac{\partial A^k_i}{\partial x^k}+\Gamma^k_{lk}A^l_i-\Gamma^l_{ik}A^k_l=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k}-\Gamma^l_{ki}A^k_l$$

式中的最后一項等于

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

由于張量 A^{kl} 的对称性，括号内的有两項互相抵消，于是留下

$$A^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^k_i)}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}. \tag{10-58}$$

在笛卡兒坐标中，$\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ 是一个反对称張量。在曲綫坐

标中，这个張量是 $A_{i;k}-A_{k;i}$。但是，借助于 $A_{i;k}$ 的表示式，而且由于 $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$，我們有

$$A_{i;k}-A_{k;i}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{10-59}$$

最后，我們将一标量 φ 的二次导数的和 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}$ 变換到曲綫坐标中去。显而易見，在曲綫坐标中，这个和化为 $\varphi_{;i}^{;i}$，但是 $\varphi_{;i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$，因为一个标量的协变微分就是普通微分。将指标升高，我們有

$$\varphi^{;i}=g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k},$$

利用公式(10-56)，我們求得

$$\varphi_{;i}^{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right). \tag{10-60}$$

值得注意，一个矢量在一超曲面上的积分变为在一个四度体积上的积分的高斯定理，按照(10-56)可以写为

$$\oint A^i\sqrt{-g}dS_i=\int A^i_{;i}\sqrt{-g}d\Omega. \tag{10-61}$$

§10-7. 引力場中粒子的运动

在狭义相对論中，一个自由粒子的运动由最小作用量原理

$$\delta S=-mc\delta\int ds=0 \tag{10-62}$$

来决定，按照这个原理，粒子是这样运动的，它的世界綫在两个給定世界点之間是極值；在我們的情形下，这是一条直綫（在普通三度空間，它与匀速直綫运动相应）。

显而易見，一个粒子在引力場中的运动为与(10-62)同式样的最小作用量原理所决定，因为引力場不是别的，只是四度空間度规的改变，而这个改变也只是表現在 ds 用 dx^i 表示的式子內的变化而已。因此，在引力場中，質点是这样运动的，它的世界点沿着

極值曲綫运动，或者如通常所說，沿着四度空間 x^0, x^1, x^2, x^3 中的短程綫运动；然而，既然在存在引力場的情況下，空間不是欧氏的，因而这条綫絕不是直綫了。

在§2-3中我們已經看出，在狹义相对論中，即在伽利略四度坐标系統中，一个自由粒子的运动方程是 $\frac{du^i}{ds}=0$ 或 $du^i=0$，此处的 $u^i=\frac{dx^i}{ds}$ 是四度速度。显然，在曲綫坐标中，这个方程可以推广为方程

$$Du^i=0. \tag{10-63}$$

从向量的协变微分的表示式(10-36)我們可得

$$du^i+\Gamma^i_{kl}u^k dx^l=0.$$

用 ds 除这个方程，則在第一項中我們有 $\frac{du^i}{ds}=\frac{d^2x^i}{ds^2}$，因此求得

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0. \tag{10-64}$$

这就是所求的运动方程。我們看出，一个粒子在引力場中的运动决定于 Γ^i_{kl} 諸量，亦即一些沒有張量特性的量。当 $\Gamma^i_{kl}=0$ 时，方程(10-64)化为通常的方程 $\frac{d^2x^i}{ds^2}=0$。

导数 $\frac{d^2x^i}{ds^2}=\frac{du^i}{ds}$ 是粒子的四度加速度。因此，我們可以称 $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ 这个量为"四度力"，这个力作用在位于引力場内的粒子上。这时，張量 g_{ik} 引起力場的"势"的作用——它的导数决定場的"强度" Γ^i_{kl}。

方程(10-64)也可以直接从最小作用量原理 $\delta\int ds=0$ 求出。我們有①

$$-\delta ds^2=-2ds\delta ds=\delta(g_{ik}dx^i dx^k)=dx^i dx^k\delta g_{ik}+$$

$$+2g_{ik}dx^i\delta dx^k=dx^i dx^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l+2g_{ik}dx^i d\delta x^k,$$

① 这个 δ 不要同平行移动的 δ 混淆。

因此，

$$\delta S=-mc\int \delta ds=mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l+g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds=$$

$$=mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l-\frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds+$$

$$+mcg_{ik}\frac{dx^i}{ds}\delta x^k\Big|. \tag{10-65}$$

第二项等于零，因为在积分限上，$\delta x^k=0$。在积分号内的第二项中，我們用 l 来代替 k。使任意的变分 δx^l 之系数为零，我們求得

$$\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-\frac{d}{ds}\left(g_{il}\frac{dx^i}{ds}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}-g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2}-\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}=0.$$

注意到第三项可以写成以下的形式：

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds},$$

并且按照(10-49)引用克里斯托菲尔符号 $\Gamma_{l,ik}$，则我們得到

$$g_{il}\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma_{l,ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0.$$

乘以 g^{ml}，并且注意到 $g^{ml}g_{il}=\delta^m_i$ 和 $g^{ml}\Gamma_{l,ik}=\Gamma^m_{ik}$，我們便得到方程(10-64)。

象通常一样，将实在的軌道的一端認为是变动的，则从(10-65)我們得到变分 δS 的表示式 $\delta S=mcu_i\delta x^i$。因此，假如和以前一样，将 $\frac{\partial S}{\partial x^i}$ 定义为粒子在引力場中的四度冲量 p_i，我們便得到

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}=mcu_i\text{①}. \tag{10-66}$$

① 因为我們用坐标 x^0 代替 x^4，分量 p_i 同在伽利略坐标内的能量和三度冲量的关系与以前我們所得到的不同，p^i 的空間和时間分量是 $\mathbf{p}$ 和 $\mathscr{E}/c$，而协变矢量 p_i 的相应的分量分别是 $\mathbf{p}$ 和 $-\mathscr{E}/c$。

它的平方是

$$p_i p^i = -m^2c^2. \tag{10-67}$$

用 $\frac{\partial S}{\partial x^i}$ 代替 p_i，我們便得到粒子在引力場中的哈密頓-雅可畢方程：

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}+m^2c^2=0. \tag{10-68}$$

(10-64)形式的短程綫方程，对于光信号的傳播是不能应用的，因为我們知道，沿着光綫傳播的世界綫，間隔 ds 是零，所以方程(10-64)内所有的項都变为无穷大。众所周知，在几何光学中，光綫傳播的方向为与光綫相切的波矢量所决定。因此，我們可以将四度波矢量写成 $k^i=\frac{dx^i}{d\lambda}$ 的形式，此处的 λ 是某一参数。在狭义相对論中，即在欧氏空間中，当光在眞空中傳播时，波矢量沿着光綫不改变，亦即 $dk^i=0$(見§7-1)。在引力場中，这个方程显然化为 $Dk^i=0$ 或

$$\frac{dk^i}{d\lambda}+\Gamma^i_{kl}k^k k^l=0 \tag{10-69}$$

(参数 λ 也由这个方程决定)。

我們知道(見§6-3)，四度波矢量的絕对值是零，亦即

$$k_i k^i=0. \tag{10-70}$$

在此式中用 $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ 代替 k^i(ψ 是相函数)，我們求得引場中的相函数方程如下：

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0. \tag{10-71}$$

§10-8. 極限过渡

在低速度的極限情形下，一个粒子在引力場中的相对論的运动方程，应当过渡到相应的非相对論的方程。这时，我們必須記着，速度低的假設就已經要求引力場的本身是弱的，假如不是如此，其中的粒子就会有高的速度。

我們来研究在这个極限情形下决定場的度規張量 g_{ik} 与引力場中的非相对論的势 φ 的关系如何。

在非相对論力学中，粒子在引力場中的运动，为拉格朗日函数(10-1)所决定。加上一个常数 $-mc^2$(拉格朗日函数中的常数項是不重要的)，我們現在将它写成

$$L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}-m\varphi.$$

要使得在場不存在时，相对論的拉格朗日函数 $L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 在 $\frac{v}{c}\to 0$ 的極限情形下过渡到非相对論的拉格朗日函数 $L=-mc^2+\frac{mv^2}{2}$，这样作是必須的。

因此，一个粒子在引力場中的非相对論作用量有下面的形式：

$$S=\int L\,dt=-mc\int\left(c-\frac{v^2}{2c}+\frac{\varphi}{c}\right)dt,$$

或者，注意到 $\mathbf{V}dt=d\mathbf{r}$，

$$S=-mc\int\left(c\,dt-\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{V}}{c}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\varphi\,dt\right).$$

将它与相对論的作用量 $S=-mc\int ds$ 相比較，我們看出，在所考慮的極限情形下，ds 等于

$$ds=c\,dt-\frac{1}{2}\,\frac{\mathbf{V}}{c}d\mathbf{r}+\frac{1}{2}\varphi\,dt.$$

取平方，略去 $\frac{v^2}{c^2}$ 的数量級的項，我們求得

$$ds^2=(c^2+2\varphi)dt^2-d\mathbf{r}^2. \tag{10-72}$$

因此，在極限情形下，度規張量的分量 g_{00} 等于

$$g_{00}=-1-\frac{2\varphi}{c^2}. \tag{10-73}$$

关于其他分量，从(10-72)推出 $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha}=0$。然而实际上，一般来說，对它們的修正，与对 g_{00} 的修正同数量級(关于这一点的

詳情，請參看 §11-11)。之所以不能用上面的方法来决定这些修正是与这个事实有关的，即对于 $g_{\alpha\beta}$ 的修正虽然与对 g_{00} 的修正同数量級，然而这个修正在拉格朗日函数内产生属于更高級小量的一些項(因为在 ds^2 的式子中，分量 $g_{\alpha\beta}$ 不乘以 c^2，而 g_{00} 却要乘以 c^2)。

§10-9. 有引力場存在时的电动力学的方程

狭义相对論中的电磁場方程很容易推广，使这些方程对于在一个任意的四度曲綫坐标中也能应用，就是說，在引力場出現时，也能应用。

在狭义相对論中，电磁場張量的定义是：$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$。显而易見，电磁場張量現在必須相应地定义为 $F_{ik}=A_{k;i}-A_{i;k}$①。但是由于(10-59)，

$$F_{ik}=A_{k;i}-A_{i;k}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{10-74}$$

因此，F_{ik} 和势 A_k 的关系不改变。由于这个原因，第一对麦克斯韋方程(4-5)也不改变它們的形式：

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}=0. \tag{10-75}$$

为了写出第二对麦克斯韋方程，首先我們必須决定在曲綫坐标中的四度电流矢量。这可以用完全与 §4-3 相同的办法完成。在体积元 $dV=dx^1dx^2dx^3$ 内的电荷可以写成 $de=\rho dV$ 的形式，此处的密度 $\rho=\sum\limits_A e_A\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A)$(見 §4-13)。用 dx^i 乘 $de=\rho dV$ 的两

---

① 在伽利略坐标中，分量 A_i 現在与标势和矢势的关系是 $A_{1,2,3}=A^{1,2,3}=-A_{x,y,z}$，$A_0=-A^0=-\varphi$(这样，在作用量的式子内出现的 A_idx^i 有它以前的意义)。与此相应，F_{ik} 与場 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系改变了；我們現在有

$$F_{12}=H_z,\ F_{13}=-H_y,\ F_{23}=H_x,$$
$$F_{10}=E_x,\ F_{20}=E_y,\ F_{30}=E_z.$$

边，我們得到

$$de\,dx^i=\rho\,dV\,dx^i=\frac{\rho}{\sqrt{-g}}\frac{dx^i}{dx^0}\sqrt{-g}\,dV\,dx^0.$$

不变的四度体积元是$\sqrt{-g}\,dV\,dx^0=\sqrt{-g}\,d\Omega$(§ 10-3)，因此四度电流矢量等于

$$j^i=\frac{\rho c}{\sqrt{-g}}\frac{dx^i}{dx^0},\tag{10-76}$$

式中，$\frac{dx^i}{dx^0}$是以"时間"x^0来測量的速度$\left(\frac{dx^i}{dx^0}\text{不是一个矢量}\right)$。四度电流矢量的分量$j^0$乘以$\frac{1}{c}\sqrt{-g}$是电荷的空間密度。

在狭义相对論中，第二对麦克斯韋方程(4-25)有如下形式:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=\frac{4\pi}{c}j^i.$$

在引力場內，它相应地取以下的形式:

$$F^{ik}_{;k}=\frac{4\pi}{c}j^i,$$

或者，按照(10-57)，

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}F^{ik})=\frac{4\pi}{c}j^i.\tag{10-77}$$

連續性方程$\frac{\partial j^i}{\partial x^i}=0$(4-22)現在有如下形式:

$$j^i_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{-g}\,j^i)=0\tag{10-78}$$

[按照(10-56)式]。

最后，也不难写出在引力場与电磁場同时存在时的带电粒子的运动方程。为此，对于一給定的場，我們应当变分作用量中与粒子同两个場的相互作用有关的那一部分，即

$$-mc\int ds+\frac{e}{c}\int A_k dx^k.$$

然而，直接将方程(3-52)簡單地推广到曲綫坐标中，也就是說用

Du^i 代替 du^i，以求所需要的方程更为简便。因此，我們求得

$$mc\frac{Du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^i_{\ k}u^k. \qquad (10\text{-}79)$$

§10-10. 恒定引力場

引力場的一个非常重要的特例就是恒定引力場。在恒定引力場中，我們可以选擇这样一个坐标系統，在其中所有的量，特别是度規張量 g_{ik}，与时間坐标 x^0 无关。

引力場在某些情况下是恒定的，例如，当所有的物体在引力場中都是靜止时（在一个 g_{ik} 与 x^0 无关的参考系統內），引力場就是一个恒定引力場。这时，两个时間方向显然是等价的（亦即所有方程在改变 x^0 的符号时应当不变）。从此可以断定，在这种情形下，度規張量 $g_{0\alpha}$ 的所有分量都为零，否則，当我們将 x^0 变为 $-x^0$ 时，間隔 ds 就改变了。这类引力場称为靜引力場。

在所有物体作稳定运动的情形下，引力場也是恒定的。这里所謂稳定运动，我們了解为这样一种运动，在这种运动中，物質在每一空間元內的密度和速度都是恒定的。我們举出一个对称物体繞着它的对称軸勻速旋轉作为这种运动的一个例子。在这种情形下，两个时間方向絕不是等价的；假如时間的符号改变，那么，例如，旋轉的角速度的符号也将会改变。显而易見，在这种类型的引力場中，度規張量的分量 $g_{0\alpha}$ 一般来說并不为零。我們称这一类恒定場为稳定引力場。

假如我們这样来选擇时間坐标 x^0，使 g_{ik} 与 x^0 无关，那么，这样的时間坐标 x^0 称为世界时間。这时必須注意，世界时間的选擇不是唯一的，世界时間的决定只能准确到一个空間坐标的任意函数；显而易見，加上这么一个函数，所有的 g_{ik} 仍旧沒有包含 x^0。此外，x^0 还可以乘以一个任意常数。

假如我們所研究的是靜引力場，在这种引力場中我們可以用一个其中 $g_{0\alpha}=0$ 的参考系統，那么，用这些条件就只能决定 x^0 到这样的程度，即只有对它乘以一个任意常数的可能。假如場在无穷远处消失，那么，选擇参考系統使間隔 ds^2 在无穷远处取伽利略形式，特别說来使在无穷远处的 $g_{00}=-1$，就是很方便的。用这些要求把上面所說的任意常数决定了，而世界时間的选擇也就可以是唯一的了。假如我們用时間坐标是世界时間的参考系統，那么，在这个系統中，确定物体間的距离是有意义的，因为，就特例言之，空間度規与 x^0 无关(見 § 10-4)。

从 g_{ik} 与 x^0 无关可以推断，例如，發生在空間两个給定点的两个同时(在 § 10-4 中所講述的意义上)事件的世界时間之差值 Δx^0 与 x^0 无关(在靜場中，我們簡單地有 $\Delta x^0=0$)。这就是說，假如我們考慮两个事件 A 和 B，这两个事件發生在空間的某一点，又有两个另外的事件 A' 和 B'，發生在空間另外一点，而 A 与 A' 同时，B 与 B' 同时，那么，事件 A 和 B 的 x^0 的差值，将等于事件 A' 和 B' 的 x^0 的差值。因此，我們可以說，世界时間的意义就在于：在空間某一点發生的两个事件的世界时間間隔，同發生在空間另一点的分别与第一对事件同时的任何另外两个事件之間的世界时間間隔相等，至于世界时間与固有时間的关系，那么公式(10-24)現在可以写成

$$\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}\,x^0, \tag{10-80}$$

这个关系式可以应用于任何有限时間間隔。世界时間的相同的間隔，在空間的不同点对应着不同的固有时間間隔。

假如所有的物体的速度都是小的，而引力場又是弱的，那么，我們可以用近似式(10-73)和(10-80)得到

$$\tau=\frac{x^0}{c}\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}},$$

又因为 $\frac{\varphi}{c^2}\ll 1$，所以近似地，

$$\tau=\frac{x^0}{c}\left(1+\frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{10-81}$$

因此，特征时間进行得愈慢，空間一給定点的引力势就愈小，也就是說引力势的絕对值愈大（以后在§11-6中，可以証明 φ 是負的）。假如将两个完全一样的鐘之一置于引力場內，那么，在引力場內的鐘要走得慢些。

上面已經指出，在靜引力場中，度規張量的分量 $g_{0\alpha}$ 是零。按照§10-4的結果，这就意味着，在这样一个場中，鐘的校正在整个空間都是可能的。我們也应注意，在靜場中，空間距离元 dl（10-28）不过是

$$dl^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{10-82}$$

在稳定場中，$g_{0\alpha}$ 异于零，在整个空間中校准鐘是不可能的。既然 g_{ik} 与 x^0 无关，那么在空間不同点發生的两个同时事件的世界时間的差值的公式（10-30）可以写成下面的形式：

$$\Delta x^0=-\int\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{10-83}$$

这个形式对于校准鐘所沿着的綫上任意两点是适用的。当沿着一个封閉曲綫校准鐘时，世界时間的差値（这个差在回到出發点时应該被記录下来）等于沿着封閉曲綫而取的积分

$$\Delta x^0=-\oint\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}. \tag{10-84}$$

可能出現这样的情况，$\frac{1}{g_{00}}g_{0\alpha}dx^\alpha$ 是（空間）坐标的某一函数的全微分，于是沿一个封閉曲綫的积分（10-84）等于零，而校正鐘就是可能的了。在这种情形下，分量 $g_{0\alpha}$ 的出現，并非由于参考系統本身的特性，而不过是由于坐标 x^0 的不恰当的选擇，只要选擇 x^0 得当，总可以使 $g_{0\alpha}$ 为零的。

讓我們来考虑一条光綫在一恒定引力場內的傳播。在§7-1

中，我們已經知道，光的频率是相函数ψ的时間导数（有相反的符号）。因此，用世界时間$\frac{x^0}{c}$表示的频率是$\omega_0=-c\frac{\partial\psi}{\partial x^0}$。既然恒定場中的相函数方程（10-71）不包含$x^0$，那么，在光綫傳播时，頻率$\omega_0$保持不变。用固有时来测量的頻率是$\omega=-\frac{\partial\psi}{\partial\tau}$；这个頻率在空間的不同点是不同的。由于关系式

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau}=\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{-g_{00}}},$$

我們就有

$$\omega=\frac{\omega_0}{\sqrt{-g_{00}}}. \tag{10-85}$$

在弱引力場中，由此可近似地得到

$$\omega=\omega_0\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{10-86}$$

我們看出，光的頻率随着引力場的势的絕对值的增加而增大，就是說，当光射向产生場的物体时，頻率就随之而增加；反之，当光离开物体时，頻率随之而减少。

假如一条光綫从一点射出，而这一点的引力势为φ_1，光綫的頻率为ω（在这一点），那么，当到达引力势为φ_2的另外一点时，光綫的頻率（以在那一点的固有时来測量）就等于

$$\frac{\omega}{1-\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1-\frac{\varphi_2}{c^2}\right)=\omega\left(1+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}\right).$$

例如在太阳上观察到的由太阳上的原子所發出的綫状光譜，与在地球上观察到的由地球上的同样原子所發出的綫状光譜是一样的。假如我們在地球上观察太阳上的原子所發出的光譜，那么，根据上面所說的，光譜中的光綫对于地球上的同样原子所發射出的光譜的光綫而言就有些移动。每条以ω为頻率的光綫将移动一間隔$\Delta\omega$，而$\Delta\omega$为公式

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \tag{10-87}$$

所决定，式中的 φ_1 和 φ_2 分别是光譜發射点和观察点的引力場的势。假如我們在地球上观察由太阳或星体所發出的光譜，那么，$|\varphi_1| > |\varphi_2|$，从(10-87)可以断定 $\Delta\omega < 0$，就是說，移向頻率減小的方向。上述的現象称为"紅移"。

根据前面关于特征时間的講述，可以直接解釋这个現象的發生。因为所有的量都与时間 x^0 无关，光波中的所有振动从空間的一点到另外一点的傳播所需要的世界时間間隔是一样的。因此很明显，在單位世界时間間隔內所發生的振动数在光綫上所有的点都是一样的。但是，对于同一个世界时間間隔，我們离开产生場的物体愈远，与之相对应的固有时間間隔就愈大。所以，当光从这些質量离开时，頻率将要降低，就是說，每單位固有时間內的振动数将要減少。

当粒子在恒定場中运动时，它的能量是守恒的，这个能量是用作用量对于世界时間的导数$\left(-c\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)$来定义的；从 x^0 并不明显地出現在哈密頓-雅可畢方程中的事实可以推出这个結論。这样定义的能量是冲量的协变四度矢量 $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$ 的时間分量。在靜場中，$ds^2 = -g_{00}dx_0^2 - dl^2$，因而对于能量（我們用 $\mathscr{E}_0$ 表示），我們有

$$\mathscr{E}_0 = -mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = -mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{-g_{00}dx_0^2 - dl^2}}.$$

我們引入用固有时間来測量的，亦即由在給定点的观察者来測量的粒子速度 $v = \frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}\,dx^0}$，則我們得到能量

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{-g_{00}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{10-88}$$

这是在粒子运动时保持为常数的量。至于 $\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ 这个量，在粒子运动时根本就不是常量。可以証明表示能量的式子(10-88)在稳定場中也是成立的，只須速度 v 用沿着粒子軌道校准过的鐘所定出的固有时来测量。

对于弱場和低速度的極限情形，从(10-88)并利用等式 $-g_{00}=1+2\varphi/c^2$，我們近似地求得

$$\mathscr{E}_0=mc^2+\frac{mv^2}{2}+m\varphi \tag{10-89}$$

($m\varphi$ 是粒子在引力場中的非相对論的势能)，这与拉格朗日函数(10-1)一致。

習　題

1. 求恒定引力場中緩慢运动的一粒子所受的力。

解　从(10-64)，略去速度的二阶項，得到

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}=-\Gamma^\alpha_{00}(u^0)^2-2\Gamma^\alpha_{0\beta}u^0u^\beta.$$

准确到同样程度，我們有

$$u_iu^i=g_{00}(u^0)^2+2g_{0\alpha}u^0u^\alpha=-1.$$

引用三度速度矢量 $v^\alpha=dx^\alpha/d\tau$，此处的 $d\tau=\frac{1}{c}ds$ 是在运动物体上的固有时間元(对于小的速度，这个矢量化为普通的伽利略速度)，則我們得到

$$u^\alpha=\frac{v^\alpha}{c},\qquad u^0\cong\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\frac{v^\alpha}{c}.$$

$\Gamma^\alpha_{0\beta}$，Γ^α_{00} 諸量，我們按普遍公式(10-50)来計算，并且在公式中所有对于 x^0 的导数都由于場是恒定的而消失了。利用如此得来的式子，我們来計算 $d^2x^\alpha/ds^2=w^\alpha/c^2$，其中，$w^\alpha=d^2x^\alpha/d\tau^2$ 是三度(空間的)加速度矢量。在答案中轉移到协变分量还要便利些；这时，必須記着，空間矢量 w^α 的协变和逆变分量为空間的度规張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 所决定，因此 $w_\alpha=\gamma_{\alpha\beta}w^\beta$。在計算时，我們必須記住，$\gamma_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta^\gamma_\alpha$(見第 286 頁的脚注)和 $\gamma_{\alpha\beta}g^{\beta0}=-g_{\alpha0}/g_{00}$(用 $\gamma_{\gamma\alpha}$ 乘等式 $g^{\alpha i}g_{i0}=g^{\alpha\beta}g_{\beta0}+g^{\alpha0}g_{00}=0$，再对 α 求和，就可以証明)。結果，我們得到下面的表示式：

$$\frac{w_\alpha}{c^2}=-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{-g_{00}}+\sqrt{-g_{00}}\frac{v^\beta}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{g_{\alpha0}}{g_{00}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{g_{\beta0}}{g_{00}}\right)\right].$$

用物体的質量乘 w_α 就得到力 f_α。引入以 $g_\alpha=-g_{\alpha 0}/g_{00}$ 为分量的三度空間矢量，并用 h 代表 g_{00}，则可用三度符号将我們的式子改写为

$$\mathbf{f}=-mc^2\,\mathrm{grad}\ln\sqrt{h}+mc\sqrt{h}\,\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{g}. \tag{1}$$

矢量的分量和所有的矢量运算，在这里应当在与由張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 所决定的空間度規相对应的曲綫坐标中进行。

我們注意，假如物体是静止的，那么，作用于物体上的力［(1)中的第一項］有势。(1)式的第二項有与科里奥利力相似的形式，这一項在稳定場中（当 $g_{0\alpha}$ 异于零时）存在。我們可以說，在由旋轉物体所产生的稳定引力場内，傅柯摆所受到的偏轉，与它在一个以角速度 $\Omega=\frac{c}{2}\sqrt{h}\ \mathrm{rot}\,\mathbf{g}$ 旋轉的物体上（没有引力場存在）所受的偏轉一样。

2. 导出光綫在恒定引力場中傳播的費尔馬原理。

解　費尔馬原理（見§7-1）的內容是

$$\delta\int k_\alpha dx^\alpha=0,$$

此处的积分是沿着光綫而取的，而被积分函数必須以頻率 ω_0（ω_0 沿光綫是常数）和坐标的微分来表示。注意到 $k_0=\frac{\partial\psi}{\partial x^0}=-\frac{\omega_0}{c}$，我們可写出 $k_0=g_{0i}k^i$ 或

$$-\frac{\omega_0}{c}=g_{00}k^0+g_{0}k^\alpha.$$

将此式代入 $k_ik^i=g_{ik}k^ik^k=0$，并写成

$$g_{00}\left(k^0+\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}k^\alpha\right)^2+\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta=0,$$

我們便得到

$$\frac{1}{g_{00}}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2+\gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta=0.$$

从这个式子而又根据矢量 k^α 应当与矢量 dx^α 同方向的事实，我們便求得

$$k^\alpha=\frac{\omega_0}{c\sqrt{-g_{00}}}\frac{dx^\alpha}{dl},$$

式中，dl(10-28) 是沿着光綫的空間距离元。为了求 k_α 的表示式，我們写出 $k^\alpha=g^{\alpha i}k_i=-g^{\alpha 0}\frac{\omega_0}{c}+g^{\alpha\beta}k_\beta$；再注意到与 $g^{\alpha\beta}$ 成倒数的張量是 $\gamma_{\alpha\beta}$，则我們有

$$k_\alpha=\gamma_{\alpha\beta}\left(k^\beta+\frac{\omega_0}{c}g^{\beta 0}\right)=\gamma_{\alpha\beta}\frac{\omega_0}{c}\left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{dx^\beta}{dl}+g^{0\beta}\right).$$

最后，乘之以 dx^α，我們得到下面形式的費尔馬原理（略去常数因子 ω_0/c）：

$$\delta\int\left(\frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}}-\frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}}dx^\alpha\right)=0.$$

在靜場中，我們简单地得到

$$\delta\int\frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}}=0.$$

請注意这个事实，在引力場中，光綫并非沿着空間最短的綫傳播，因为沿着空間的最短的綫应該为方程

$$\delta \int dl = 0$$

所决定。

§ 10-11. 旋轉

作为稳定引力場的一个例子，我們来研究匀速旋轉的参考系統。为了求間隔 ds，我們来进行从靜止系統到这个匀速旋轉系統的变換。在靜止系統的坐标 r', φ', z', t（我們用圓柱坐标 r', φ', z'）中，間隔有如下形式：

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2.$$

設在旋轉系統中的圓柱坐标为 r, φ, z。假如旋轉軸与 Z 軸和 Z' 軸重合，那么，我們有 $r' = r, z' = z, \varphi' = \varphi + \Omega t$，此处的 Ω 是旋轉的角速度。将这些式子代入，我們得到所要求的 ds^2 在旋轉的参考系統中的表示式：

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2. \qquad (10\text{-}90)$$

必須注意，旋轉的参考系統仅仅可以应用到向外伸長到等于 c/Ω 的距离为止。事实上，从(10-90)可以看出，当 $r > c/\Omega$ 时，g_{00} 变为正値，而这是不允許的。旋轉系統对于大的距离之所以不能应用是因为在大的距离处，速度将大于光速，因此，这样的系統不可能用眞实的物体来实現。

象在一切稳定場中一样，在旋轉物体上的鐘不可能在所有点上都被單値地校准。当沿着任何封閉曲綫进行鐘的校准并回到出發点时，我們得到一个时間，这个时間与原来的时間的差値是[見(10-84)]

$$\Delta t = -\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}},$$

假設 $\Omega r/c \ll 1$(即旋轉速度比光速为小得多),則差值是

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2}\int r^2 d\varphi = \pm\frac{2\Omega}{c^2}S, \tag{10-91}$$

式中,S 是軌道包圍的面在垂直于旋轉軸的一个平面上的投影(符号用+或-,依我們順旋轉方向或逆旋轉方向行走而定)。

假定有一条光綫沿着某一条封閉路徑傳播。讓我們来計算光綫从出發到回到原点所經过的时間(准确到与 v/c 同数量級的項)。假如沿着这一条封閉曲綫,时間是校准了的,又假設在每一点上我們都用固有时間,那么,根据定义,光的速度将永等于 c。既然固有时間与世界时間之差同 v^2/c^2 同数量級,那么,在計算所要求的时間間隔 t 时,若只要求准确到与 v/c 同量級的量,这个差就可以略去不計了。因此,我們有

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2}S,$$

式中,L 是封閉路徑的長度。与此相应,用比值 L/t 来測量的光速等于

$$c \pm 2\Omega\frac{S}{L}. \tag{10-92}$$

这个公式,如多普勒效应的一級近似公式一样,也可以很容易地用純經典的方法求得。

習 題

求旋轉坐标系統中的空間距离元。

解 利用(10-90),(10-28),(10-29),我們求得

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1-\Omega^2\frac{r^2}{c^2}},$$

此式决定旋轉参考系統中的空間几何。我們注意,在平面 $z=$常数內的圓(圓心在旋轉軸上)的周長与其半徑之比等于

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}},$$

就是說,大于 2π。

第十一章　引力場方程

§11-1. 曲率張量

讓我們再来討論矢量的平行移动的概念。如我們在§10-5所說的，在非欧氏空間的普遍情形下，一个矢量的无限小的平行移动被定义为这样的移动，在这个移动中，矢量的分量在一个坐标系統中不改变，这个坐标系統在指定的无限小的体积元內是笛卡兒坐标系統。

假如 $x^i=x^i(s)$ 是某一曲綫的参数方程（s 是从某一点起量得的弧長），那么，矢量 $u^i=\frac{dx^i}{ds}$ 就是与曲綫相切的單位矢量。假如我們所考慮的曲綫是短程綫，那么，如我們在§10-7中所看到的，沿着短程綫 $Du^i=0$［見(10-63)式］。这就是說，假如将矢量 u^i 从短程綫上的一点 x^i 平行移动到同一曲綫上的另一点 x^i+dx^i，那么，这个矢量将与在 x^i+dx^i 点与短程綫相切的矢量 u^i+du^i 重合。因此，当短程綫的切綫沿短程綫本身移动时，切綫将自平行地移动。

在另一方面，当两个矢量平行移动时，它們之間的夹角显然保持不变。因此我們可以說，任意的矢量沿着任何一条短程綫平行移动时，矢量同短程綫的切綫所夹之角保持不变。換句話說，当一个矢量平行移动时，它在短程綫方向的分量在路程的所有点上应当是不变的。

在非欧氏空間中，有一个非常重要的情况，一个矢量从一个給定点到另一个給定点的平行移动，假如沿着不同的路徑进行，則得

到不同的結果。就特例言之，从此可以推断，假如我們将一个矢量沿着某一条封閉曲綫自平行地移动，那么，在回到出發点时，这个矢量将不与原来的值相重合。

为了了解这一点，讓我考慮一个非欧氏的两度空間，即任意的彎曲面。圖 11-1 表示被三条短程綫所包圍的这样的曲面的一部分。我們来将矢量 *1* 沿着这三条曲綫所构成的周綫平行移动。在沿着曲綫 AB 移动时，矢量 *1* 与曲綫所作之角保持不变，而当到达 B 点时則变为矢量 *2*。与此相似，在沿着 BC 移动时，矢量 *2* 变为矢量 *3*。最后当矢量沿曲綫 CA 从 C 点移到 A 点时，它与这条曲綫所成之角保持不变，在到达 A 点时，矢量变为矢量 *1′*，而矢量 *1′* 与矢量 *1* 并不重合。

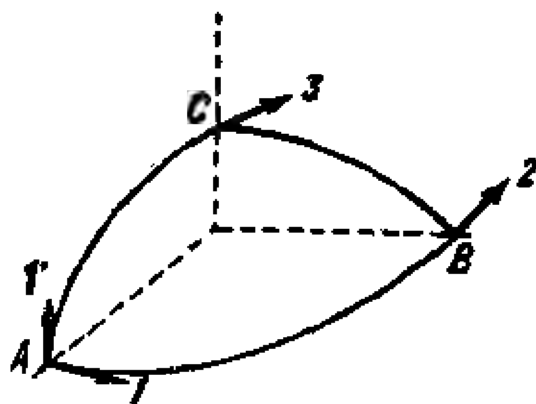


圖 11-1.

現在我們来求一个矢量在繞着任何无限小的封閉曲綫平行移动时所生的变化的普遍公式。这个变化 ΔA_k 显然可以写成 $\oint \delta A_k$ 的形式，此处的积分是沿着一給定的周綫而取的。用表示式(10 35)代替 δA_k，我們就有

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$

(在积分号下面的矢量 A_i 当沿周綫移动时是变化的)。利用斯托克斯定理(1-38)，我們可以将这个綫积分化为該周綫所包圍的曲面上的面积分。于是，

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial x^m}\right]df^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}A_i - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right]df^{lm}.$$

但是矢量 A_i 沿着周綫的变化是由于平行移动；因此，我們可以从 $\delta A_i=\Gamma^n_{il}A_n dx^l$，即从 $\frac{\partial A_i}{\partial x^l}=\Gamma^n_{il}A_n$ 直接求出 A_i 的导数。将之代入，改换被积分函数中最后两項的指标，我們求得

$$\Delta A_k=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}-\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right\}A_i df^{lm}.$$

由于我們所考虑的是一个无限小的封閉周綫，我們可以用被积分函数在周綫内的某一点的值代替被积分函数，并从积分符号内提到积分符号外。剩下来的积分不过是周綫所包圍的曲面的面积，因而我們最后得到

$$\Delta A_k=\frac{1}{2}R^i_{klm}A_i\Delta f^{lm}, \tag{11-1}$$

式中，R^i_{klm} 是一个四阶張量：

$$R^i_{klm}=\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}-\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{11-2}$$

(11-1)式的左边是在同一点的矢量值之差，是一个矢量，由此可見，R^i_{klm} 是一个張量。張量 R^i_{klm} 称为曲率張量，或称为黎曼-克里斯托非尔張量。

逆变矢量 A^k 的相似的公式是容易求得的。为此，我們注意到，既然在平行移动时，标量不改变，所以 $\Delta(A^kB_k)=0$，此处的 B_k 是某一协变矢量。利用(11-1)，我們有

$$\Delta(A^kB_k)=A^k\Delta B_k+B_k\Delta A^k=\frac{1}{2}A^kB_iR^i_{klm}\Delta f^{lm}+B_k\Delta A^k=$$

$$=B_k\left(\Delta A^k+\frac{1}{2}A^iR^k_{ilm}\Delta f^{lm}\right)=0,$$

因为矢量 B_k 是任意的，所以

$$\Delta A^k=-\frac{1}{2}R^k_{ilm}A^i\Delta f^{lm}. \tag{11-3}$$

假如我們将矢量 A_i 对 x^k 和 x^l 进行两次协变微分，那么，在一般情形下，所得的結果与微分的次序有关，而与普通的微分的情况不

同。結果証明，$A_{i;k;l}-A_{i;l;k}$这个差将为我們上面所介紹的同一張量所决定。就是說，我們有公式

$$A_{i;k;l}-A_{i;l;k}=A_mR^m_{ikl}, \tag{11-4}$$

直接計算就可以驗証这个公式(为簡單起見，我們略去了計算的过程)。同理，对于逆变矢量，

$$A^i_{;k;l}-A^i_{;l;k}=-A^mR^i_{mkl}. \tag{11-5}$$

最后，也很容易得到張量的二次导数的相似的公式(最簡便的方法是考虑，比方說，一个形如 A_iB_k 張量的特例，而不去考虑張量 A_{ik}，並利用公式(11-4)和(11-5)；由于綫性关系，这样所得到的公式，由于是綫的，所以对于一个任意的張量也有效)。

显然，在欧氏空間中，曲率張量为零。事实上，在欧氏空間中，我們可以这样来选擇坐标系，使在整个空間中，$\Gamma^i_{kl}=0$，因此 $R^i_{klm}=0$。由于 R^i_{klm} 的張量特性，R^i_{klm} 在任何其他坐标系統中也等于零。这与下述事实有关，即在欧氏空間中，一个矢量从一点到另一点的平行移动是一个單值的运算，在沿着一条封閉周綫繞行时，矢量不改变。在欧氏空間中，协变微分的次序显然可以改变。

逆定理也是成立的：假如 $R^i_{klm}=0$，那么，空間就是欧氏的。事实上，在任何空間中，我們可以选擇一个坐标系統，这个坐标系統在一个指定的无穷小的区域内是笛卡兒坐标系統。假如 $R^i_{klm}=$ $=0$，那么，平行移动就是一个單值的运算。因此，借助于平行移动，可以将笛卡兒坐标系統从这个巳知的无限小区域移到空間的所有其余的无限小区域，这样就对于整个空間建立了一个笛卡兒坐标，也就是說，空間是欧氏的。

因此，曲率張量为零与否是一个辨别空間是否是欧氏空間的准則。

我們指出，虽然在一个非欧氏空間中，我們也能选擇一个坐标系統，这个坐标系統在一个指定点是笛卡兒坐标系統，就是說，在

一个指定点，所有的 Γ^i_{kl} 都化为零，但同时，在这个同一点上的曲率張量並未化为零（因为 Γ^i_{kl} 的导数並不随同 Γ^i_{kl} 一齐化为零）。

§ 11-2. 曲率張量的一些特性

从張量 R^i_{klm} 的表示式(11-2)直接可推断，曲率張量对于指标 l 和 m 是反对称的：

$$R^i_{klm}=-R^i_{kml}. \tag{11-6}$$

此外，很容易証明下面的恒等式是成立的：

$$R^i_{klm}+R^i_{mkl}+R^i_{lmk}=0. \tag{11-7}$$

除了混合曲率張量 R^i_{klm} 以外，我們也用协变曲度張量

$$R_{iklm}=g_{in}R^n_{klm}. \tag{11-8}$$

用簡單的变換方法，很容易得到 R_{iklm} 的表示式如下：

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+$$

$$+g_{np}(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im}-\Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}). \tag{11-9}$$

从这个式子立刻可以看出下面的对称性質：

$$R_{iklm}=-R_{kilm}, \tag{11-10}$$

$$R_{iklm}=-R_{ikml}, \tag{11-11}$$

$$R_{iklm}=R_{lmik}. \tag{11-12}$$

从这些式子可以断定，R_{iklm} 的所有 $i=k$ 或 $l=m$ 的分量都为零。

最后，对于 R_{iklm} 如同对于 R^i_{klm} 一样，恒等式(11-7)也是成立的：

$$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0. \tag{11-13}$$

此外，根据从(11-10)到(11-12)的各关系式可以断定，假如我們将 R_{iklm} 的任意三个指标作循环替换，並将这样所得到三个分量相加，那么，結果将为零。

最后，我們还要証明下面的恒等式：

$$R^n_{ikl;m}+R^n_{imk;l}+R^n_{ilm;k}=0. \tag{11-14}$$

使用在一給定点的笛卡兒坐标系統，很容易証明上面的恒等式。由于它的張量特性，关系式(11-14)在任何坐标系統中都是有效的。将(11-2)式微分，然后将 $\Gamma^l_{kl}=0$ 代入，在考虑的点上，我們便得到

$$R^n_{ikl;m}=\frac{\partial R^n_{ikl}}{\partial x^m}=\frac{\partial^2\Gamma^n_{il}}{\partial x^m\partial x^k}-\frac{\partial^2\Gamma^n_{ik}}{\partial x^m\partial x^l}.$$

利用上面的式子，很容易証明(11-14)的确是成立的。

从曲率張量，用縮并的方法，可以造出一个二阶張量。我們只能用一个方法进行这种縮并。事实上，假如按照指标 m 和 i 来縮并 R^m_{ikl}，我們得到零：

$$R^m_{mkl}=g^{im}R_{imkl}=0,$$

因为 R_{imkl} 对于指标 i 和 m 是反对称的。对于指标 m 和 k 縮并(对于指标 m 和 l 縮并，显然会得到同一結果，只是符号相反)，則得到二阶張量

$$R_{ik}=R^l_{ilk}=\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}. \tag{11-15}$$

这个張量显然是对称的：

$$R_{ik}=R_{ki}. \tag{11-16}$$

最后，縮并 R_{ik}，我們便得到不变量

$$R=g^{ik}R_{ik}=g^{il}g^{km}R_{iklm}, \tag{11-17}$$

它叫做空間的标曲率。

因为有(11-10)—(11-13)的各关系存在，并非所有的曲率張量的分量都是独立的。我們現在就来确定曲率張量的独立分量的数目。首先我們考虑一个两度空間的情形，亦即考虑一个普通曲面；这时，指标 i,k,l,m 可以取 1, 2 两个值。指标 i 和 k 或 l 和 m

同时为 1 或 2 的分量为零。所有不为零的分量或者是彼此相等，或者相差一个符号；因此，在这种情形中，曲率張量只有一个独立的分量，例如 R_{1212}。不难証明，在这种情形中，标曲率 $R = g^{il}g^{km}R_{iklm}$ 等于 $\frac{2R_{1212}}{g^2}$（g 是由 g_{ik} 所构成的行列式）。$\frac{R}{2}$ 在現在的情况下等于熟知的曲面的高斯曲率，即两个主曲率半徑之积的倒数。

現在我們来决定三度空間內的曲率張量的独立分量的数目。讓我們考慮那些只有两个不同的指标的分量，即有 R_{abab} 形式的分量（記着，在此不对于重复指标取和）。从 1, 2, 3 中选出 a 和 b 的一对値一共有三个方法。由于（11-10）—（11-12）的諸关系式，每一对 a 和 b 仅給出一个独立分量；因此，一共有三个这种类型的独立分量。具有三个不同指标的，其形式如 R_{abac} 的分量也共有三个：R_{1213}, R_{2123}, R_{3231}；所有其余的分量或者与它們相等，或者与之相差仅在于符号。因此，在三度空間中曲率張量有六个独立分量。对称張量 R_{ik} 也有这样多的分量。因此，根据綫性关系 $R_{ik} = g^{ml}R_{limk}$，張量 R_{iklm} 的所有分量可以用 R_{ik} 和度規張量 g_{ik} 来表示。假如我們选擇一个坐标系統，它在給定点是笛卡兒坐标系統，那么，在变換时（这些变換在这个給定点化为笛卡兒系統的旋轉），度規張量的分量在这一点是不变的，一般来說，張量的分量也是不变的。适当地选擇坐标系統，我們总可能办到使曲率張量的三个分量在这个給定点化为零；就特例言之，我們能够将張量 R_{ik} 变到主軸上。因此，在一个三度空間中，每一点的率度可由三个量来决定。

最后，我們来討論四度空間。曲率張量的具有两个不同指标的分量（就是有 R_{abab} 的形式的）共有六个；指标 a 和 b 可以从 1, 2, 3, 4 四个値中选擇，选擇的方法一共有六个，而每一对値給出一个独立分量。具有三个不同指标的分量一共有十二个：从 1, 2, 3,

4 中选择三个不同的指标一共有四个方法，每三个值給出三个独立分量（例如 R_{1213}, R_{2123}, R_{3132}）。最后，四个指标都不同的分量有三个：R_{1234}, R_{1423}, R_{1342}；其余的分量或与它們相等，或仅相差一个符号。但是在这三个分量中，只有两个是独立的，因为三者之間通过恒等式(11-13) $R_{1234}+R_{1423}+R_{1342}=0$ 相互联系着。因此，在四度空間中一共有 20 个独立分量。[①] 选擇一个坐标系統它在給定点为笛卡兒坐标系統，考慮旋轉这个笛卡兒系統的变換（因而 g_{ik} 的值在我們所考慮之点并不改变），我們可以办到使曲率張量的六个分量为零。（四度坐标系統的可能的独立旋轉有六个）。因此，在每一点上的四度空間的曲率将为十四个量所决定。

習 題

在 $g_{0\alpha}=0$, $g_{00}=-1$ 的坐标系統中（只要將四个坐标变換得适当，我們总可以滿足这四个条件的），計算張量 R_{ik} 的分量（將 R_{ik} 的純空間部分分开）。

解：当 $g_{0\alpha}=0$ 时，三度空間的度規張量 $\gamma_{\alpha\beta}$(10-29) 与 $g_{\alpha\beta}$ 重合（$\gamma_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$）。导数 $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0}$ 也与一个三度張量重合，后者我們用 $\kappa_{\alpha\beta}$ 来代表。从公式(11-15)直接計算，得到下面的結果：

$$R_{00}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\kappa_{\alpha}^{\alpha}-\frac{1}{4}\kappa^{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta},$$

$$R_{0\alpha}=\frac{1}{2}(\kappa_{\alpha;\beta}^{\beta}-\kappa_{\beta;\alpha}^{\beta}),$$

$$R_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\kappa_{\alpha\beta}+P_{\alpha\beta}.$$

式中 $P_{\alpha\beta}$ 是通过 $\gamma_{\alpha\beta}$ 来表示的一个三度張量，表示的方法，正如用 g_{ik} 表示 R_{ik} 一样。所有的升标运算和协变微分运算，在此处都是在三度空間內进行的；就是說利用度規張量 $\gamma_{\alpha\beta}$（正如我們在四度空間中用張量 g_{ik} 来进行这些运算一样）。

---

① 我們將能得到独立分量的指标 i, k, l, m 的組合写在下面：

1212	1223	1313	1324	1423	2323	2424
1213	1224	1314	1334	1424	2324	2434
1214	1234	1323	1414	1434	2334	3434

并且 $R_{1234}-R_{1324}+R_{1423}=0$。

§ 11-3. 引力場的作用量函数

为了得到决定引力場的方程，必須預先决定这个場的作用量 S_g。变分場的作用量与粒子的作用量之和，我們就会得到所要求的方程。

正如电磁場的作用量一样，作用量 S_g 应当用遍及整个場（即遍及全部空間和两个已定值之間的时間坐标 x^0）的积分来表示。既然 S_g 应当是一个不变量，所以它有下面的形式：

$$\int G\sqrt{-g}d\Omega,$$

式中，G 是某一标量。为了决定这个标量，我們将从这个事实出發，即引力場方程应当包含"势"的导数，这些导数不能高于二次（正如电磁場方程一样）。既然場方程是从变分作用量函数而得，那么，标量 G 就应当包含 g_{ik} 的导数，而这些导数不高于一次；因此，G 仅仅包含張量 g_{ik} 和 Γ^i_{kl} 諸量。

然而單从 g_{ik} 和 Γ^i_{kl} 各量，不可能造出一个不变量。这一点可以直接从这个事实看出，即只要坐标系統选擇适当，我們总能使所有的 Γ^i_{kl} 在一个給定点为零。然而，有一个标量 R（四度空間的曲率）存在，它虽然除了包含 g_{ik} 和 g_{ik} 的一次导数外，还包含 g_{ik} 的二次导数，但是 R 是 g_{ik} 的二次导数的一次函数。因为这个一次性，不变式的积分 $\int R\sqrt{-g}d\Omega$ 可以利用高斯定理化为一个不包含二次导数的式子的积分。就是說，$\int R\sqrt{-g}d\Omega$ 可以写成下面的形式：

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\int G\sqrt{-g}\,d\Omega+\int\frac{\partial(\sqrt{-g}w^i)}{\partial x^i}d\Omega,$$

式中，G 仅仅包含張量 g_{ik} 和它的一次导数，而在第二个积分内的被积分函数中有某一个量 w^i 的散度的形式（詳細計算見本节之

末)。按照高斯定理,第二个积分可以变换为在超曲面上的积分,这个超曲面包圍着另外两个积分在其上进行的四度体积。当我們变分作用量函数时,右边第二項的变分等于零,因为按照最小作用量原理,場在积分区域的边界上的变分等于零。因此,我們可以写出

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

左边是一个标量;因此右边的式子也是一个标量(积分 $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ 本身当然不是一个标量)。

G 这个量满足上面所提出的条件,因为它只包含 g_{ik} 和它的一次导数。从上面的討論已經知道,$\delta\int G\sqrt{-g}d\Omega$ 是唯一的这样一个不变量,所以我們可以写出

$$\delta S_g=-\frac{c^3}{16\pi k}\,\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega=-\frac{c^3}{16\pi k}\,\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega,\tag{11-18}$$

式中 k 是一个新的普适常数。与在 §4-2 中对于电磁場的作用量函数所做的相似,我們能够看出,常数 k 应当是正的(見本节末)。

这个常数 k 称为引力常数。k 的量綱可以从(11-18)式直接推出。作用量的量綱是克·厘米^2·秒$^{-1}$。所有坐标的量綱是厘米,而 g_{ik} 則沒有量綱,所以 R 的量綱为厘米$^{-2}$。結果我們得到 k 的量綱为厘米^3·克$^{-1}$·秒$^{-2}$。k 的数値是

$$k=6.67\times10^{-8}\text{厘米}^3\cdot\text{克}^{-1}\cdot\text{秒}^{-2}.\tag{11-19}$$

我們指出,我們可以使 k(或任何其他沒有量綱的数)等于 1。但同时,質量的單位在这种情况下与長度的單位一样了。[1]

[1] 有时設 $k=c^2$;那么,質量就用厘米来度量,此处 1 厘米$=1.35\times10^{28}$ 克。用这些單位表示的質量称为物体的引力半徑。

最后，讓我們來計算(11-18)式中的G。从R_{ik}的表示式(11-15)，我們得到

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\, g^{ik}R_{ik} = \sqrt{-g}\Big\{ g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\Big\}.$$

对于右边的前两項，我們有

$$\sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\, g^{ik}\Gamma^l_{ik}) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\, g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\, g^{ik}\Gamma^l_{il}) - \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\, g^{ik}).$$

略去全导数，我們便求得

$$\sqrt{-g}\, G = \Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\, g^{ik}) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\, g^{ik}) - (\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})\, g^{ik}\sqrt{-g}.$$

利用(10-52)—(10-55)各公式，我們求得右边的前两項等于$\sqrt{-g}$乘以

$$\begin{aligned} 2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk} - \Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} &= \\ = g^{ik}(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li} - \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}) &= \\ = 2g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}). \end{aligned}$$

最后，得到

$$G = g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}). \qquad (11\text{-}20)$$

度規張量的分量是决定引力場的量。因此，在对于引力場的最小作用量原理中，g_{ik}各量正是变分的对象。然而在此必須作下面的基本保留。明言之，我們現在不能确定在一个实际上可能实現的場中，作用积分对于g_{ik}的所有可能的变分有一个極小値（而不只是一个極端値）。这与下面的事实有关，即不是g_{ik}的每一个变

化都与空間-时間度規的变化相应，空間-时間度規的变化等于引力場的实际变化。当坐标变換仅仅是在同一个空間-时間中从一个系統变換到另外一个系統时，分量 g_{ik} 也要改变。就一般情形說，每个这样的坐标变換是四个（按照坐标的数目）独立变換的集合。为了除去 g_{ik} 的这样的不与度規变化有关联的变化，我們可以加上四个輔助条件，并且要求在变分时必須滿足这些条件。因此，当最小作用量原理应用到引力場时，我們只能断言，我們能够加四个輔助条件在 g_{ik} 上，当这些条件被滿足时，作用量函数对于 g_{ik} 的变分有一个極小值。[1]

記住这些意見，現在我們来証明引力常数应当是正的。我們用三个分量 $g_{0\alpha}$ 等于零和由 $g_{\alpha\beta}$ 的分量所构成的行列式 $|g_{\alpha\beta}|$ 为常数作为上面所提的四个輔助条件，其中 $|g_{\alpha\beta}|$ 是：

$$g_{0\alpha}=0, \quad |g_{\alpha\beta}|=\text{常数}$$

（由于最后一个条件，我們有 $g^{\alpha\beta}\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}=\dfrac{\partial}{\partial x_\gamma}|g_{\alpha\beta}|=0$）。在作用量表示式的被积分函数中，我們有兴趣是那些包含有 g_{ik} 对于 x^0 的导数的項（比較第 78 頁）。利用（11-20）的簡單計算表明，在 G 内的这些項是

$$\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

很容易看出，这个量在本質上是正的。事实上，选擇一个空間坐标系統，这个坐标系統在一个給定点，在一个給定瞬間是笛卡兒坐标系統（因此 $g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$），我們便得到 $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2$，亦即一个平方和。

---

[1] 但是，我們必須着重指出，我們說过的一切对于从最小作用量原理求場方程的过程并无影响（§ 11-5）。这些方程可以从下面的要求來得到，即作用量函数必須是一个極端值（就是它的一次变分为零），而不一定是一个極小值。因此，在求場方程时，我們能够使 g_{ik} 全部分量的变分都是独立的。

因此，只要 $g_{\alpha\beta}$ 随着时間 x^0 的变化足够快（在 x^0 的积分限間的时間間隔內），我們可以使 G 有任意大的值。假如 k 是負数，那么，作用量函数就应該无限制地下降（其值为負而其絕对值則可任意地大），卽不可能有極小值。

§11-4. 能量-冲量張量

在 §4-7 中，我們已經求出一个普遍法則来計算任何物理体系的能量-冲量張量，这个物理体系的作用量函数为四度空間內的积分(4-38)所决定。在曲綫坐标中，这个积分应当写成：

$$S=\frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega. \tag{11-21}$$

（在伽利略坐标中，$g=-1$，S 則化为 $\int \Lambda dV dt$）。积分应該在整个三度空間和在两个給定瞬間內进行，就是說积分应該在两个超曲面之間的四度空間的无限区域內进行。

如在 §4-7 中已經指出的，从公式(4-42)計算出来的能量-冲量張量，一般来說，不是对称的，这也是应該如此的。为了使之对称化，必須将有 $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$ 形式的适当項加到表示式(4-42)上，此处的 ψ_{ikl} 对于指标 k 和 l 是反对称的。現在我們要提出一个計算能量-冲量張量的新方法，这个新方法有个优点，就是它立卽导出正确的結果。

在(11-21)中，我們进行了从坐标 x^i 到坐标 $x'^i=x^i-\xi^i$ 的变换，此处的 ξ^i 是一些小的量。在这个变换下，g^{ik} 是按照下面的普遍公式变换的：

$$g^{ik}(x^l)=g'^{lm}(x'^l)\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}=g'^{lm}\left(\delta^i_l+\frac{\partial \xi^i}{\partial x'^l}\right)\left(\delta^k_m+\frac{\partial \xi^k}{\partial x'^m}\right)\approx$$

$$\approx g'^{ik}(x'^l)+g'^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x'^m}+g'^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x'^l}.$$

張量 g'^{ik} 在这里是 x'^l 的函数，而張量 g^{ik} 則是原来坐标 x^l 的函

数。为了将所有的項化为同样一些变数的函数，我們将 $x'^l=x^l-\xi^l$ 代入 g'^{ik}，并且将 $g'^{ik}(x^l-\xi^l)$ 展开为 ξ^l 的冪級数。此外，略去 ξ^l 的高次項，在所有含 ξ^l 的項中用 g^{ik} 代替 g'^{ik}。因此，我們求得

$$g^{ik}(x^l)=g'^{ik}(x^l)-\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}+g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}+g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

用直接驗証法不难証明，右边的后三項可以写为 ξ^i 的逆变导数之和 $\xi^{i;k}+\xi^{k;i}$。因此，我們最后得到 g^{ik} 的变换式如下：

$$g'^{ik}=g^{ik}+\delta g^{ik};\quad \delta g^{ik}=-\xi^{i;k}-\xi^{k;i}. \tag{11-22}$$

旣然作用量 S 是一个标量，那么，在坐标变换时它不改变。另一方面，作用量在坐标变换时的变化可以写成下面的形式。和在§4-7 中一样，設 q 为决定作用量为 S 的物理体系的量。在坐标变换下，这些量 q 改变 δq。但是，在計算 δS 时，我們不必写出与 q 的变化有关的項。根据这个物理体系的"运动方程"，所有这些項全相等并互相抵消，因为这些方程用使 S 对 q 的变分等于零的办法也恰好能得到。因此，只須写出这些与 g_{ik} 的变化相关联的項就足够了。象平常一样利用高斯定理，并且在积分限上使 $\delta g^{ik}=0$，我們便求得下面形式的 δS：①

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega=$$

$$=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}d\Omega.$$

① 必須着重指出，我們在此所介紹的对称張量 g_{ik} 的分量的导数的表示法，在某种意义上，有符号的特性。就是說，导数 $\partial F/\partial g^{ik}$($F$ 是 g_{ik} 的某一个函数)在实質上只有当 $dF=\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}dg^{ik}$ 时才有意义。但是在 $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}dg_{ik}$ 中，包含对称張量的 $i\neq k$ 的分量的微分 dg_{ik} 的項出現两次。因此，在对于 $i\neq k$ 的任一确定的分量 g_{ik} 微分 F 的具体表示式时，所得到的量应該两倍于用 $\partial F/\partial g^{ik}$ 所表示的量。当我們在包含导数 $\partial F/\partial g^{ik}$ 的公式中給指标 i,k 以一定的值时，必須注意到这个注解。

現在，我們引入下面的符号：

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}-\frac{\partial\sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}},\qquad(11\text{-}23)$$

这时，δS 将取如下的形式[1]：

$$\delta S=-\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=$$

$$=\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega.\qquad(11\text{-}24)$$

（注意 $g^{ik}\delta g_{ik}=-g_{ik}\delta g^{ik}$，因此，$T^{ik}\delta g_{ik}=-T_{ik}\delta g^{ik}$）。将 δg^{ik} 的表示式(11-22)代入，利用張量 T_{ik} 的对称性，則我們有

$$\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}(\xi^{i;k}+\xi^{k;i})\sqrt{-g}\,d\Omega=$$

$$=\frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

此外，我們将此式作如下改变：

$$\delta S=\frac{1}{c}\int (T^k_i\xi^i)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega-$$

$$-\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega.\qquad(11\text{-}25)$$

利用(10-56)，第一个积分可以写成

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,T^k_i\xi^i)d\Omega,$$

并可变换为在一个超曲面上的积分。既然在积分的两个限上，ξ^i 为零，那么，这个积分就应当为 0。

因此，命 δS 等于零，我們就有

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega=0.$$

---

[1] 我們要注意，在我們所考虑的情形中，十个量 δg_{ik} 并不是独立的，因为它們是坐标变换的结果，而坐标变换只有四个。因此从 $\delta S=0$，不能推断 $T_{ik}=0$。我們也要注意，δS 的表示式(11-24)对于 g_{ik} 的任何变分都是正确的。

根据 ξ^i 的任意性，可以得出結論：

$$T_{i;k}^{k}=0. \tag{11-26}$$

将此式与在伽利略坐标系統中的有效的方程(4-41)$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k}=0$ 相比較，我們看出，用(11-23)式定义的張量 T_{ik} 应当与能量-冲量張量是一个东西，至少也要准确到一个常数因子[①]。例如，用公式(11-23)来对电磁場$\left(\Lambda=-\frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik}=-\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{lm}g^{il}g^{km}\right)$进行計算，不难証明这个因子等于 1，就是說从(11-23)可以看出，T_{ik} 确实是能量-冲量張量[②]。

因此，根据(11-23)式，将函数 Λ 对度規張量的分量(和它們的导数)微分，我們就能够計算出能量-冲量張量。这时，用(11-23)式定义的張量 T_{ik} 显然是对称的。为了計算能量-冲量張量，公式(11-23)不仅在引力場存在时是便利的，而且在引力場不存在时也是便利的，当度規張量沒有独立的意义时，形式地过渡到曲綫坐标是作为計算 T_{ik} 的一个中間步驟来进行的。

电磁場的能量-冲量張量的表示式(4-50)在曲綫坐标中应当写成下面的形式：

$$T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{k}^{l}-\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right),$$

或者，对于混合張量的分量，

$$T_{i}^{k}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F^{kl}-\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}\delta_{i}^{k}\right). \tag{11-27}$$

与此相似，一个宏观物体的能量-冲量張量的协变分量(4-63)是

$$T_{ik}=(p+\varepsilon)u_iu_k+pg_{ik},$$

---

① 就是說可能差一个常数因子——譯者。

② 在伽利略坐标中，$T_{00}=T^{00}=-T_{0}^{0}$ 是能量密度，而 $\frac{1}{c}T_{\alpha}^{0}=-\frac{1}{c}T_{0\alpha}=\frac{1}{c}T^{0\alpha}$ 則是冲量密度的分量；$T_{\alpha}^{\beta}=T_{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}$ 各量构成冲量的通量密度。

而混合分量則是

$$T_i^k = (p+\varepsilon)u_i u^k + p\delta_i^k. \tag{11-28}$$

我們指出，T_{00} 这个量永为正①：

$$T_{00} \geqslant 0. \tag{11-29}$$

关于分量 T_0^0，不可能作一般的断語。

§ 11-5. 引力場方程

現在我們可以来推导引力場方程。这些方程可以从最小作用量原理 $\delta(S_m+S_g)=0$ 求得，此处的 S_g 和 S_m 分别是引力場的与物質的作用量。現在我們来对引力場，即 g_{ik} 諸量，进行变分。

先来計算变分 δS_g。我們有

$$\delta \int R\sqrt{-g}\,d\Omega = \delta \int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega =$$

$$= \int \left\{ R_{ik}\sqrt{-g}\,\delta g^{ik} + R_{ik}g^{ik}\delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\,\delta R_{ik} \right\} d\Omega.$$

从公式(10-51)，我們得到

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\delta g^{ik};$$

将此式代入上式，求得

$$\delta \int R\sqrt{-g}\,d\Omega =$$

$$= \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega + \int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \tag{11-30}$$

为了計算 δR_{ik}，我們指出，虽然 Γ^i_{kl} 并不构成一个張量，但是它們的变分 $\delta\Gamma^i_{kl}$ 却构成一个張量，因为 $\Gamma^k_{il}A_k dx^l$ 是一个矢量从

① 事实上，我們有 $T_{00} = \varepsilon u_0^2 + p(u_0^2 + g_{00})$。第一項永为正。在第二項中，我們写出 $u_0 = g_{00}u^0 + g_{0\alpha}u^\alpha = \frac{g_{00}dx^0 + g_{0\alpha}dx^\alpha}{ds}$；經过簡單变换以后，得到 $p(dl/ds)^2$，此处的 dl 是空間距离元(10-28)；从此，可以清楚地看出 T_{00} 的第二項也为正。

某一点 P 平行移动到一个与之相距无限近的一点 P' 的变化［見(10-35)式］。因此，$\delta\Gamma^k_{il}A_k dx^l$ 是两个矢量之差，这个差是从 P 到 P' 的两个平行移动的結果（一个平行移动有不变的 Γ^i_{kl}，另一个有变化的 Γ^i_{kl}）。在同一点的两个矢量之差是一个矢量，所以 $\delta\Gamma^i_{kl}$ 是一个張量。

我們应用这样一个坐标系統，它在給定点是一个伽利略坐标系統。这时，在这一点，所有的 $\Gamma^i_{kl}=0$。利用 R_{ik} 的表示式(11-15)，我們有（記着，g^{ik} 的第一次导数現在为零）

$$g^{ik}\delta R_{ik}=g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}\right\}=$$

$$=g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik}=\frac{\partial w^l}{\partial x^l},$$

式中
$$w^l=g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik}-g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}.$$

既然 w^l 是一个矢量，我們可以将所得的关系式在一个任意坐标系統中写成

$$g^{ik}\delta R_{ik}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}w^l)$$

［用 $w^l_{;l}$ 代替 $\frac{\partial w^l}{\partial x^l}$，并利用(10-56)式］。因此，(11-30)式右边的第二个积分等于

$$\int g^{ik}\,\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=\int\frac{\partial(\sqrt{-g}w^l)}{\partial x^l}d\Omega,$$

利用高斯定理，可以变为 w^l 在包圍整个四度体积的超平面上的积分。既然場的变分在积分边界为零，那么这一項应該为零。因此，变分 δS_g 等于①

$$\delta S_g=\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega. \quad (11\text{-}31)$$

① 在此，我們指出一个有趣的情况。假如我們計算出变分 $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$［用(11-15)式的 R_{ik}］，将 Γ^i_{kl} 作为独立变数，将 g_{ik} 作为常数，然后用 Γ^i_{kl} 的表示式(10-50)，則我們恒得零，这是容易証明的。反之，如果要求上述变分等于零，則也可以确定 Γ^i_{kl} 和度規張量間的关系。

我們指出，假如我們从場的作用量的表示式

$$S_g=\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

出發，那么，我們就会得到(这是容易証明的)

$$\delta S_g=\frac{c^3}{16\pi k}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ki}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}d\Omega.$$

将此式与(11-31)比較，我們得到下面的关系式：

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}.\tag{11-32}$$

对于物質的作用量的变分，根据(11-24)式立即可以写出

$$\delta S_m=-\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega,\tag{11-33}$$

式中，T_{ik} 是物質（包括电磁場在內）的能量-冲量張量。只有对于質量足够大的物体，引力相互作用才起作用（由于引力常数太小的原故）。因此，在研究引力場时，我們通常应該討論宏观物体。与此相应，对于 T_{ik}，我們通常应当用表示式（11-28)。假如引力場是由真空中的电磁場輻射所建立的，那么，对于 T_i^k，我們应該用表示式(11-27)。但是必須記着，在自然界中存在的自由輻射的能量密度用物質的物体的能量(包含靜止能在內)密度比較起来是非常小的。因此，研究电磁場在沒有物質存在时所建立的引力場，不能引起特殊的兴趣。

因此，从最小作用量原理 $\delta S_m+\delta S_g=0$，利用（11-31）和(11-33)两个关系，我們求得：

$$\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R-\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=0,$$

由于 δg^{ik} 的任意性，从此得到：

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}, \qquad (11\text{-}34)$$

或者，写成混合分量的形式，

$$R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k R=\frac{8\pi k}{c^4}T_i^k. \qquad (11\text{-}35)$$

这就是所求的引力場方程——广义相对論的基本方程。

将(11-35)对于指标 i 和 k 縮并，我們求得 $R=-\frac{8\pi k}{c^4}T$ $(T=T_i^i)$。因此場方程也可以写成

$$R_{ik}=\frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right). \qquad (11\text{-}36)$$

应当注意，引力場方程是非綫性方程。因此，对于引力場，迭加原理是无效的，这与在狭义相对論中的电磁場的情形(§4-2)不同。

然而必須記住，在实际上，我們通常必須研究弱的引力場，对于弱的引力場，第一次近似的場方程是綫性的(見下一节)。对于这样的場，在这种近似情形下，迭加原理是成立的。

在真空的空間中，$T_{ik}=0$，引力場的方程化为方程

$$R_{ik}=0. \qquad (11\text{-}37)$$

我們提醒一下，这絕不意味着在真空中，空間-时間是平坦的；要为平坦的，就必須有 $R^i_{klm}=0$。

电磁場的能量-冲量張量有 $T_i^i=0$ 的特性[見(4-51)式]。另一方面，既然 $R=-\frac{8\pi kT}{c^4}$，那么，在有电磁場出現而沒有任何質量的情形下，空間-时間的标曲率为零($R=0$)。

如我們所知道的，張量 T_i^k 的散度 $T^k_{i;k}$ 为零(§11-4)，因此方程(11-35)的左边的散度应当为零。从此可以很容易証实下面恒等式的成立：

$$R^k_{i;k}-\frac{1}{2}(\delta_i^k R)_{;k}=R^k_{i;k}-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^i}=0. \qquad (11\text{-}38)$$

这也可以直接对恒等式(11-14)乘以 $g^{ik}\delta_n^l$ 来得到。

因此，$T^k_{i;k}$ 的方程实質上已經包含在場方程(11-35)之內。另一方面，方程 $T^k_{i;k}=0$ 表示能量守恒定律和冲量守恒定律，还包含我們所研究的能量-冲量張量所屬于的物理体系的运动方程(即物質粒子的运动方程或第二对麦克斯韋方程)。因此，引力場方程也包含建立这个場的物質（物質的粒子和物質的电磁場）本身的方程。与此不同，电磁場的方程（麦克斯韋方程)仅仅包含总电荷守恒的方程(連續性方程)，但是不包含建立場的电荷的运动方程。

因此，在电磁場的情形里，电荷的分布和电荷的运动可以任意規定，只假設总电荷不变就行了，这个电荷分布的規定，借助于麦克斯韋方程，就决定了电荷所产生的場。在引力場中，产生場的物質的分布和运动絕不能任意規定，相反地，它們应当与物質所产生的場同时决定(在給定起始条件下解場方程)。

然而必須指出，引力場方程并未完全决定物質的分布和运动。事实上，这些方程并不包含物态方程，即联系它的压力与密度的方程。除了場方程以外，物态方程也是应該給出的。

四个坐标 x^i 可以受任意的变换。用这些变换，我們可以从張量的十个分量中任意規定四个。因此独立的只有六个量 g^{ik}。此外，在物質的能量-冲量張量中出現的四度速度 u^i 的分量，彼此之間有 $u^iu_i=-1$ 的关系存在，因而，它們之中只有三个是独立的。因此，十个場方程(11-34)实际上确定了十个未知数，就是六个 g_{ik} 的分量，三个 u^i 的分量和物質密度 ρ（或它的压力 p)。

从方程(11-34)中消去四个未知数——速度和密度，可以得到决定六个量 g_{ik} 的六个方程。因为十个方程（11-34）彼此之間有四个恒等式 $T^k_{i;k}=0$ 存在，所以共有六个 g_{ik} 的方程。

習 題

求稳定引力場方程。

解　引入符号 $g_{00}=-h$ 和 $g_{0\alpha}=hg_\alpha$，则

$$g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}-hg_\alpha g_\beta,$$

式中，$\gamma_{\alpha\beta}$ 是空間的(三度的)度规張量(10-29)。以后，所有升标、降标或协变微分，都是在以 $\gamma_{\alpha\beta}$ 为度规張量的三度空間内进行的(如在 § 11-2 的習題中一样)。我們再引入三度反对称張量

$$f_{\alpha\beta}=g_{\beta;\alpha}-g_{\alpha;\beta}\equiv\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta},$$

和三度速度 v^α，三度速度 v^α 由下式定义：

$$\frac{v^\alpha}{c}=\frac{dx^\alpha}{\sqrt{h}\,(dx^0-g_\alpha\,dx^\alpha)}.$$

計算張量 R_{ik} 和 T_{ik} 的分量，可得到下面的方程：①

$$\frac{1}{2h}h_{;\alpha}^{;\alpha}-\frac{1}{4h^2}h_{;\alpha}h^{;\alpha}+\frac{h}{4}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}=\frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{\varepsilon+p}{1-\frac{v_\alpha v^\alpha}{c^2}}-\frac{\varepsilon-p}{2}\right],$$

$$\frac{\sqrt{h}}{2}f_{;\beta}^{\beta\alpha}+\frac{3}{4\sqrt{h}}f^{\beta\alpha}h_{;\beta}=-\frac{8\pi k}{c^4}\frac{p+\varepsilon}{1-\frac{v_\alpha v^\alpha}{c^2}},$$

$$P_\beta^\alpha+\frac{h}{2}f^{\alpha\gamma}f_{\beta\gamma}-\frac{1}{2h}h_{;\beta}^{;\alpha}+\frac{1}{4h^2}h^{;\alpha}h_{;\beta}=$$

$$=\frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{\varepsilon-p}{2}\delta_\beta^\alpha+\frac{(p+\varepsilon)v^\alpha v_\beta}{c^2(1-v_\alpha v^\alpha/c^2)}\right].$$

P_β^α 是一个用 $\gamma_{\alpha\beta}$ 来表示的三度張量，其表示方法，正如用 g_{ik} 来表示 R_k^i 一样)。

§ 11-6. 牛頓定律

在已經求得的引力場方程中，我們来作到非相对論力学的極限过度。正如在 § 10-8 所指出的，关于所有粒子速度很小的假設，要求引力場也是很弱的。

在 § 10-8 中，我們求得在極限情形下的度规張量的分量 g_{00} (我們所需要的唯一分量)是

$$g_{00}=-1-\frac{2\varphi}{c^2}.$$

---

① 假如先注意到最后的方程只能在組合量 $f_{\alpha\beta}$ 中含矢量 g_α 的导数，而不是矢量的本身，計算就可簡化。事实上，方程对于时間坐标的形如 $x^0\to x^0+\varphi(x^\alpha)$ 的变换(这个变换不改变場的穩定性)应該不变。但是对于这样的变换，g_α 变为 $g_\alpha+\varphi_{,\alpha}$，而張量 $f_{\alpha\beta}$ 本身显然不改变。

其次，对于能量-冲量張量的分量，我們可以用表示式(4-65) $T_i^k=\mu c^2 u_i u^k$，其中 μ 是物体的密度(在一个單位体积内的粒子的質量之和)。既然宏观运动也認为是緩慢的，那么，对于四度速度 u^i，我們应当略去它的所有的空間分量，而仅仅保留时間分量，就是說，应当使 $u^\alpha=0, u^0=-u_0=1$。因此，在 T_i^k 的所有分量之中只留有

$$T_0^0=-\mu c^2. \tag{11-39}$$

标量 $T=T_i^i$ 将等于同一値 $-\mu c^2$。

我們将場方程(11-36)写成

$$R_i^k=\frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k T\right);$$

当 $i=k=0$ 时，

$$R_0^0=-\frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

不难証明，在我們所考慮的近似情形中，所有其余的方程都恒等于零。

在从普遍公式(11-15)計算 R_0^0 时，我們要注意，所有含 Γ_{kl}^i 諸量的乘积的項，在任何一种情形下，都是关于 φ 的二級小量。含有对于 $x^0=ct$ 的导数的項是很小的(同那些含有对于坐标 x^α 的导数的項比較)，因为它們含有 $1/c$ 的額外冪。結果，留下 $R_{00}=-R_0^0=$ $=\partial\Gamma_{00}^\alpha/\partial x^\alpha$。将 $\Gamma_{00}^\alpha\cong-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$ 代入，我們求得

$$R_0^0=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{\alpha 2}}=-\frac{1}{c^2}\Delta\varphi.$$

因此，場方程化为

$$\Delta\varphi=4\pi k\mu. \tag{11-40}$$

方程(11-40)是引力場在非相对論力学中的方程。我們要注意这个方程完全与电势的泊松方程(5-4)相似，只是在此处以質量密度乘 $-k$ 来代替了电荷密度。因此，与(5-8)相类似，我們可以

立即写出方程(11-40)的通解如下:

$$\varphi=-k\int\frac{\mu dV}{R}.\tag{11-41}$$

这个公式决定在非相对論的近似情况下任意質量分布的引力場的势。

就特例言之,一个質量为m的粒子的場的势是

$$\varphi=-\frac{km}{R},\tag{11-42}$$

因此,作用在該場內的另外一个粒子(質量为m')上的力$F=-m'\frac{\partial\varphi}{\partial R}$等于

$$F=-\frac{kmm'}{R^2}.\tag{11-43}$$

这就是众所周知的牛頓引力定律①。

粒子在引力場內的势能等于粒子的質量乘以場的势(§10-10),这与电場內的势能等于电荷乘以場的势相似。因此,与(5-10)相似,我們可以写出任意質量分布的势能如下:

$$U=-\frac{k}{2}\int\mu\varphi dV.\tag{11-44}$$

对于离产生場的質量很远的恒定引力場的牛頓势,我們可以写出一个展开式,这个展开式与在§5-5和§5-6中所得到的靜电場的展开式相类似。我們选擇質量的慣性中心为坐标原点。这时,积分$\int\mu\mathbf{r}dV$将恒等于零,这个积分与电荷体系的偶極矩相类似。因此,与靜电場的情形不同,在引力場的情形中,我們总能够消除“偶極項”。因此,势φ的展开式有下面的形式:

$$\varphi=-k\left\{\frac{M}{R_0}+\frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}+\cdots\right\},\tag{11-45}$$

① 从(11-43)我們看出,对于基本粒子,引力对电磁力之比是極其微小的。例如,对于两个电子,比值km^2/e^2等于2×10^{-43},对于两个質子,这个比值等于7×10^{-37}。

式中 $M=\int \mu dV$ 是体系的总質量，而

$$D_{\alpha\beta}=\int \mu(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})dV \qquad (11\text{-}46)$$

可以称为質量的四極矩張量[1]。它与通常的轉动慣量張量

$$J_{\alpha\beta}=\int \mu(r^2\delta_{\alpha\beta}-x_\alpha x_\beta)dV$$

有下面的关系式：

$$D_{\alpha\beta}=J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}-3J_{\alpha\beta}. \qquad (11\text{-}47)$$

§11-7. 中心对称的引力場

我們来研究一个具有中心对称的引力場。任何中心对称分布的物体都可以产生这样的場；这时，当然不仅分布必須是中心对称的，而且物体的运动也必須是中心对称的，就是說，每一点的速度必須是沿着半徑的。

場的中心对称性就等于說，空間-时間的度量，即間隔 ds 的表示式在所有与中心等距离之点必須一样。在欧氏空間中，这个距离等于矢徑；在非欧氏空間中，例如在引力場存在的情形下，沒有一个量具有欧氏矢徑的一切特性（例如，既等于到中心的距离，又等于圓周之長除以 2π）。因此，"矢徑"的选择現在是任意的。

假如我們用空間"球"坐标 r, θ, φ，那么，ds^2 的最广义的中心对称式是

$$ds^2=h(r,t)dr^2+k(r,t)(\sin^2\theta\, d\varphi^2+d\theta^2)+$$
$$+l(r,t)dt^2+a(r,t)dr\,dt, \qquad (11\text{-}48)$$

式中，a, h, k, l 是"矢徑" r 和"时間" t 的某种函数。但是，因为在广义相对論中，參考系統是可以任意选择的，所以我們还可以对坐标进行不違背 ds^2 的对称性的任何变换；这就是說，我們可以按照

[1] 在此，我們将所有指标都写成下标，沒有区分协变和逆变分量，因为所有的运算都是在普通的牛頓空間（欧基里德空間）中进行的。

公式 $r=f_1(r',t')$，$t=f_2(r',t')$ 变换坐标 r 和 t，此处的 f_1，f_2 是新坐标 r'，t' 的任意函数。

利用这种可能性，我們这样来选择坐标 r 和时間 t，首先，使 ds^2 的表示式中的 $drdt$ 的系数 $a(r,t)$ 为零，其次，使 ds^2 的表示式中的第二項的系数 $k(r,t)$ 簡化为 $-r^2$①。后一要求意味着，矢徑是这样定义的，使一个以坐标原点为圓心的圓周等于 $2\pi r$（在 $\theta=\pi/2$ 的平面內的圓的弧元等于 $dl=rd\varphi$）。将 h 和 l 分别写成形如 $-e^\lambda$ 和 c^2e^ν 的指数式是便利的，此处的 λ 和 ν 是 r 和 t 的某种函数。因此，我們得到 ds^2 的下面的表示式：

$$ds^2=e^\nu c^2dt^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)-e^\lambda dr^2. \qquad (11\text{-}49)$$

用 x^1,x^2,x^3,x^0 分别代表坐标 r,θ,φ,ct，对于度規張量的异于零的分量，我們有

$$g_{11}=e^{+\lambda},\quad g_{22}=r^2,\quad g_{33}=r^2\sin^2\theta,\quad g_{00}=-e^\nu.$$

显然，

$$g^{11}=e^{-\lambda},\quad g^{22}=r^{-2},\quad g^{33}=r^{-2}\sin^{-2}\theta,\quad g^{00}=-e^{-\nu}.$$

用这些值，不難从公式(10-50)算出 Γ^i_{kl}。計算的結果如下（一撇表示对于 r 的微分，在符号上的一点表示对于 ct 的微分）：

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^0_{10}=\frac{\nu'}{2},\quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^0_{11}=\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu},\quad \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda},\quad \Gamma^1_{10}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},\\
&\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{23}=\cot\theta,\quad \Gamma^0_{00}=\frac{\dot\nu}{2},\\
&\Gamma^1_{10}=\frac{\dot\lambda}{2},\quad \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta e^{-\lambda},
\end{aligned}\right\}\qquad (11\text{-}50)$$

Γ^i_{kl} 的所有其余的分量（除了那些与所写出的分量差别为指标 k

① 必須指出这个条件并未單值决定时間坐标的选擇。就是說，它还可以受到一个不包含 r 的形如 $t=f(t')$ 的任意变换。

和 l 交换的分量外)都为零。

为了得到引力的方程，我們应当按照公式(11-15)計算張量 R_k^i 的分量。一个簡單但是冗長的計算导出下面的方程:

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_1^1=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{11-51}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_2^2=\frac{8\pi k}{c^4}T_3^3=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda}+\frac{\dot{\lambda}^2}{2}-\frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right), \tag{11-52}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0=e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{11-53}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^1=e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r}. \tag{11-54}$$

其余的分量恒等于零。

引力方程对于在真空中的，卽在产生場的質量以外的中心对称場这一非常重要的情形可以完全积分(斯法兹西尔特,1916)。命能量-冲量張量等于零,我們得到下面的方程:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0, \tag{11-55}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0, \tag{11-56}$$

$$\dot{\lambda}=0 \tag{11-57}$$

[我們沒有写第四个方程,卽方程(11-52),因为它可以从其余三个方程推出]。

从(11-57)式直接看出,λ 与时間无关。此外，将(11-55)和(11-56)相加,可得 $\lambda'+\nu'=0$, 卽

$$\lambda+\nu=f(t), \tag{11-58}$$

式中,$f(t)$仅仅是 t 的函数。但是当我們选擇間隔 ds^2 为(11-49)的形式后，还可能作一个形如 $t=f(t')$ 的任意的时間变换(見第 338

頁的脚注)。这样的变换就等于将一个任意的时間函数加到 ν 上，并且借它的帮助，我們总可能使(11-58)式中的 $f(t)$ 为零。因此，并不損失任何普遍性，我們可以認为 $\lambda+\nu=0$，即 $\lambda=-\nu$。因此我們注意到，眞空中的中心对称引力場自然而然是静止的。

方程(11-56)是容易积分的，其結果是

$$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1+\frac{\text{常数}}{r}.$$

我們注意一个有兴趣的情况，即在无限远处($r\to\infty$)，$e^{-\lambda}=e^{\nu}=1$，这就說明，与吸引物体相距很远之处，度規就自然而然地变成了伽利略度規。在远距离处，場是弱的，牛頓定律应当成立，这样就不难通过物体的質量来表示这个常数。即是說，我們应当有 $g_{00}=-1-\frac{2\varphi}{c^2}$ [見(10-73)式]，此处的势 φ 等于自己的牛頓表示式(11-42)：$\varphi=-\frac{km}{r}$ (m 是产生場的物体的总質量)。从此显然可見，常数 $=-\frac{2km}{c^2}$。

因此，对于間隔 ds，我們最后得到

$$ds^2=\left(c^2-\frac{2km}{r}\right)dt^2-r^2(\sin^2\theta\,d\varphi^2+d\theta^2)-\frac{dr^2}{1-\frac{2km}{c^2r}}. \qquad (11\text{-}59)$$

这个式子完全确定任何中心对称分布的質量在眞空中所产生的引力場。我們着重指出，这个解不仅对于静止的質量有效，而且对于运动的質量也有效，只要求这个运动也有中心对称性(例如，中心对称的振动)。

空間度規为空間距离元的表示式

$$dl^2=r^2(\sin^2\theta\cdot d\varphi^2+d\theta^2)+\frac{dr^2}{1-\frac{2km}{c^2r}} \qquad (11\text{-}60)$$

所决定，[張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的分量(10-29)現在显然与相应的分量 $g_{\alpha\beta}$

重合]。从中心到空間的任意点的距离是 $\int_0^r \sqrt{g_{11}}dr$，而且既然 $g_{11}\geqslant 1$，那么，

$$\int_0^r \sqrt{g_{11}}\,dr \geqslant r$$

(只有对于在无穷远的点，等号才成立)。以坐标原点为圓心，經过考虑点所作之圓的圓周是 $2\pi r$。由此可見，一个圓的周長与其半徑之比小于 2π。

此外，从(11-59)我們知道，$-g_{00}\leqslant 1$。由于定义固有时的公式(10-24)$d\tau=\sqrt{-g_{00}}\,dt$，可以推断

$$d\tau\leqslant dt.$$

只有在无穷远处，等号方能成立，在无穷远处，t 与固有时重合。因此，在与質量相距有限距离处的时間比在无穷远处的时間走得慢。換句話說，在引力場內，光譜綫移向紅的一边(見 § 10-10)。

如我們所知道的，分量 g_{00} 应当是負的。从(11-59)式，我們看出，"矢徑" r 所取的值不能小于 $2km/c^2$。一个圓的周長的相应的最小値是

$$2\pi\cdot\frac{2km}{c^2}=\frac{4\pi km}{c^2}.$$

这就表明，一个物質的物体的綫度不能小于某确定的下限。即是說，一个質量为 m 的物体，其周長不能小于 $4\pi km/c^2$。①

最后我們再介紹 ds^2 在距离坐标原点很远处的一个近似式：

$$ds^2=ds_0^2-\frac{2km}{c^2r}(dr^2-c^2dt^2). \qquad (11-61)$$

第二項是对伽利略度規 ds_0^2 的一个小的修正。在与产生場的質量

① 我們要注意，这个結果如果应用到基本粒子上就沒有意义。对于基本粒子，本書所提供的場的理論，由于量子現象，对于比 km/c^2 大很多(10⁴⁰的数量級)倍的范圍，如我們所已指出的，已經不能应用了。

相距甚远处，每个場都是中心对称的。因此，(11-61)式决定与任何物体体系相距甚远之处的度規。

关于在吸引質量內的中心对称引力場，也可以做某些一般的考慮。从方程(11-53)，我們看出，当 $r\to 0$ 时，λ 至少要象 r^2 一样快地趋近于零；假如不是如此，那么，方程的右边，当 $r\to 0$ 时，就应該变为无限大了；就是說，T_0^0 在 $r=0$ 处应該有一个奇异点，然而这在物理上是荒謬的。将(11-53)作形式的积分，其边界条件是 $\lambda|_{r=0}=0$，我們得到

$$\lambda=-\ln\left\{1+\frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^r T_0^0 r^2 dr\right\}. \qquad (11\text{-}62)$$

既然 $T_0^0=-e^{-\nu}T_{00}\leqslant 0$［見(11-29)式］，那么由此可見，$\lambda\geqslant 0$，即

$$e^{\lambda}\geqslant 1. \qquad (11\text{-}63)$$

注意到这个不等式和下面的不等式：

$$T_1^1=p+(p+\varepsilon)(u^1)^2 e^{\lambda}\geqslant 0,$$

我們可从方程(11-51)求出 $\nu'\geqslant 0$。但是，当 $r\to\infty$ 时(离开質量甚远)，度規变为伽利略度規，即 $e^{\nu}\to 1$, $\nu\to 0$。因此，从 $\nu'\geqslant 0$ 可以断定，在整个空間 $\nu\leqslant 0$，即

$$e^{\nu}\leqslant 1. \qquad (11\text{-}64)$$

这些不等式表明，前面所講的真空中的中心对称場中的鐘的走动和空間度規的性質同样可以应用于吸引物質內的場。

假如引力場是由一个半徑为 a 的球体所产生，那么，当 $r>a$ 时，我們就有 $T_0^0=0$。对于 $r>a$ 的点，公式(11-62)給出

$$\lambda=-\ln\left\{1+\frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2 dr\right\}.$$

另一方面，在这里我們可以应用屬于真空的表示式(11-59)按照此式，

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

使以上两式相等，我們得到公式

$$m = -\frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2 dr, \tag{11-65}$$

这个公式是用物体的能量-冲量張量来表示物体总質量。

習　題

1．求在眞空中的中心对称引力場中的空間曲率。

解　空間曲率張量(我們用 $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ 來表示)是用空間度規張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 来表示的，表示的方法，正如用 g_{ik} 表示 R^{i}_{klm} 一样。張量 $P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ 的分量可以用張量 $P_{\alpha\beta}=P^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$ 的分量(和 $\gamma_{\alpha\beta}$)来表示，因此，只須計算 $P_{\alpha\beta}$ 就够了(§ 11-2)。用从(11-60)得到的 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的值，經过計算后，我們得到張量的分量的値如下：

$$P^{\theta}_{\theta} = P^{\varphi}_{\varphi} = \frac{km}{c^2 r^3}, \qquad P^{r}_{r} = -\frac{2km}{c^2 r^3},$$

当 $\alpha \neq \beta$ 时，$P^{\alpha}_{\beta}=0$，因此張量 P^{β}_{α} 是对角的。应当注意，$P^{\theta}_{\theta}, P^{\varphi}_{\varphi}$ 为正，而 P^{r}_{r} 为負。这就是說，空間几何是这样的，使經过原点的"平面"內的一个三角形的三个角之和大于 π，而使"垂直"于矢徑的"平面"內的三角形的三个角之和小于 π。

2．决定旋轉曲面的形式，我們要求在这个旋轉曲面上的几何同在眞空中的中心对称引力場內經过原点的"平面"上的几何一样。

解　在旋轉曲面 $z=z(r)$ 上的几何为(用柱体坐标)長度元

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = dr^2(1+z'^2) + r^2 d\varphi^2$$

所决定。將此式与在所考虑的場內的"平面" $\theta=\pi/2$ 內的長度元

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{1-\dfrac{2mk}{c^2 r}}$$

相比較，我們得到

$$1+z'^2 = \left(1 - \frac{2mk}{c^2 r}\right)^{-1},$$

由此可得

$$z = 2\sqrt{\frac{2mk}{c^2}}\sqrt{r - \frac{2mk}{c^2}}.$$

3．將間隔(11-59)变换到这样的坐标中，在其中的空間距离元 dl 和它的欧氏表示式成比例。

解　命

$$r = \left(1 + \frac{mk}{2c^2 r_1}\right)^2 r_1,$$

从(11-59)，我們得到

$$ds^2=\left(\frac{1-\frac{km}{2c^2r_1}}{1+\frac{km}{2c^2r_1}}\right)^2 c^2\,dt^2-\left(1+\frac{km}{2c^2r_1}\right)^4(dr_1^2+r_1^2d\theta^2+r_1^2\sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

坐标 r_1,θ,φ 称为各向同性的球坐标.

4．求中心对称引力場在这样一个坐标系統中的方程，这个坐标系統在每一点都同在該点的物体一起运动（这样的参考系統称为"固有"参考系統）。

解　我們利用間隔元(11-78)内的坐标 r,t 的两个可能的变換，第一，使 $dr\,dt$ 的系数 $a(r,t)$ 为零；第二，使物体的徑向速度 $\dot r$ 在所有的点为零(根据中心对称性，速度其余的分量一般都为零)．在此以后，坐标 r 和 t 仍然可能經受一个任意形如 $r=r(r')$, $t=t(t')$ 的变換．

分别用 $-e^{\lambda}$, $-e^{\mu}$, c^2e^{ν} (λ,μ,ν 是 r 和 t 的函数)来表示 h,k,l，我們得到 ds^2 的表示式如下：

$$ds^2=e^{\nu}c^2\,dt^2-e^{\mu}(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)-e^{\lambda}\,dr^2. \tag{1}$$

物質的能量-冲量张量的分量是

$$T_1^1=T_2^2=T_3^3=p,\quad T_0^0=-\varepsilon. \tag{2}$$

經过一个相当冗長的計算，我們导出下面的引力方程：

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_1^1=\frac{8\pi k}{c^4}p=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2}+\mu'\nu'\right)-e^{-\nu}\left(\ddot\mu-\frac{1}{2}\dot\mu\dot\nu+\frac{3}{4}\dot\mu^2\right)-e^{-\mu}, \tag{3}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_2^2=\frac{8\pi k}{c^4}p=\frac{1}{4}e^{-\lambda}(2\nu''+\nu'^2+2\mu''+\mu'^2-\mu'\lambda'-\nu'\lambda'+\mu'\nu')+$$
$$+\frac{1}{4}e^{-\nu}(\dot\lambda\dot\nu+\dot\mu\dot\nu-\dot\lambda\dot\mu-2\ddot\lambda-\dot\lambda^2-2\ddot\mu-\dot\mu^2), \tag{4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0=-\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon=e^{-\lambda}\left(\mu''+\frac{3}{4}\mu'^2-\frac{\mu'\lambda'}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot\lambda\dot\mu+\frac{\dot\mu^2}{2}\right)-e^{-\mu}, \tag{5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T_0^1=0=\frac{1}{2}e^{-\lambda}(-2\dot\mu'-\dot\mu\mu'+\dot\lambda\mu'+\nu'\dot\mu). \tag{6}$$

从方程 $T^k_{i;k}=0$ 可以得到 λ,μ,ν 各量間的一些普遍关系．$T^k_{i;k}=0$ 这个方程是包含在引力方程(11-26)之内的．将(1)和(2)的 T_i^k 和 g_{ik} 代入，我們得到下面两个方程：

$$\dot\lambda+2\dot\mu=-\frac{2\dot\varepsilon}{p+\varepsilon},\quad \nu'=-\frac{2p'}{p+\varepsilon}.$$

假如 p 是能量 ε 的已知的函数，那么，这些方程可以直接积分如下：

$$\lambda+2\mu=-2\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+f_1(r), \tag{7}$$

$$\nu=-2\int\frac{dp}{p+\varepsilon}+f_2(t). \tag{8}$$

由于上面所説的可以作形如 $r=r(r')$, $t=t(t')$ 的任意变換，$f_1(r)$ 和 $f_2(t)$ 可以任意

选擇。

5. 求当物質的压力为零时的中心对称引力場方程的通解（Б. Датт, 1937 年）。

解 我們用"固有"参考系統(見習題 4)。从公式(8)显而易見，当 $p=0$ 时，我們可以設 $\nu=0$。因此，方程(6)可以直接对时間积分，其結果为

$$e^{\lambda}=\frac{e^{\mu}\mu'^2}{4(f+1)},\tag{1}$$

其中，$f=f(r)$ 是 r 的一个任意函数(只滿足 $1+f>0$ 的条件)。将此式代入習題 4 的方程(3)内，得到

$$\ddot{\mu}+\frac{3}{4}\dot{\mu}^2-fe^{-\mu}=0.$$

这个方程的第一次积分是

$$\frac{\dot{\mu}^2}{4}=fe^{-\mu}+Fe^{-\frac{3}{2}\mu},$$

其中，$F=F(r)$是另一个任意函数。再积分一次，我們便得到下面的結果：

当 $f>0$ 时，

$$ct=\frac{1}{f}\sqrt{fe^{\mu}+Fe^{\frac{\mu}{2}}}-\frac{F}{f^{\frac{3}{2}}}\operatorname{sh}^{-1}\left(\sqrt{\frac{fe^{\frac{\mu}{2}}}{F}}\right)+\Phi(r);$$

当 $f<0$ 时，

$$ct=\frac{1}{f}\sqrt{fe^{\mu}+Fe^{\frac{\mu}{2}}}-\frac{F}{(-f)^{\frac{3}{2}}}\sin^{-1}\left(\sqrt{-\frac{fe^{\frac{\mu}{2}}}{F}}\right)+\Phi(r).\tag{2}$$

将这些式子代入習題 4 的方程(5)内，对于 ε，我們就得到：

$$\frac{4\pi k}{c^4}\varepsilon=\frac{F'}{f'}e^{-\frac{3}{2}\mu}.\tag{3}$$

公式(1)—(3)就是所求的通解。我們注意，在本質上，通解并不与三个任意函数有关，而只与两个任意函数有关，这两个任意函数决定 f, F, Φ 諸量間的关系，因为坐标 r 本身还可以任意选擇(在令 $\nu=0$ 以后，时間的选擇是單值的)。

§ 11-8. 中心对称引力場中的运动

我們現在来研究物体在中心对称引力場内的运动。正如在每一个中心对称場内一样，运动發生在經过原点的一个"平面"上；我們选擇这个平面作为平面 $\theta=\pi/2$。

为了决定物体（質量为 m）的軌道，我們用哈密頓-雅可畢方

程:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}+m^2c^2=0.$$

利用由間隔的表示式(11-59)确定的 g^{ik}, 我們求出下面的方程:

$$e^{-\nu}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2-e^{\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2-m^2c^2=0,\quad(11\text{-}66)$$

其中,

$$e^{\nu}=1-\frac{2km'}{c^2r}.\quad(11\text{-}67)$$

(m' 是产生場的物体的質量)。用解哈密頓-雅可畢方程的一般法則,我們来寻求下面形式的 S:

$$S=-\mathscr{E}_0t+M\varphi+f(r)$$

式中,$\mathscr{E}_0$是常能量,M是冲量矩。將上式代入(11-66),我們便求得方程

$$e^{-\nu}\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}-\frac{M^2}{r^2}-e^{\nu}\left(\frac{df}{dr}\right)^2=m^2c^2,$$

由此得到

$$\frac{df}{dr}=e^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}e^{-\nu}-m^2c^2-\frac{M^2}{r^2}}.$$

因此,作用量等于

$$S=-\mathscr{E}_0t+M\varphi+\int e^{-\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2e^{-\nu}}{c^2}-m^2c^2-\frac{M^2}{r^2}}dr.\quad(11\text{-}68)$$

軌道为方程 $\partial S/\partial M=$常数所决定,由此可得

$$\varphi=\int\frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}-m^2c^2e^{\nu}-\frac{M^2}{r^2}e^{\nu}}}.\quad(11\text{-}69)$$

它可以化为橢圓积分。

作为在中心对称引力場內的运动的一个例子,我們举出行星在太阳引力場內的运动。旣然行星的速度比光速小很多,所以引力的相对論理論对于用牛頓理論所得的行星軌道,只能导出一个微不足道的修正。

为了近似研究軌道方程(11-69),比較便利的是将它写成下面的微分方程:

$$\left(\frac{M}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}-m^2c^2e^{\nu}-\frac{M^2}{r^2}e^{\nu},$$

或者引入新的变数 $\sigma=1/r$, 将 e^{ν} 的式子代入,而写成

$$M^2c^2\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2=\mathscr{E}_0^2-m^2c^4+2km'm^2c^2\sigma-M^2c^2\sigma^2+2km'M^2\sigma^3.$$

将这个式子对 φ 微分,我們得到

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=\frac{1}{p}-\sigma+\alpha\sigma^2, \tag{11-70}$$

在其中,我們引入了常数 $p=M^2/km'm^2$, $\alpha=3km'/c^2$。

这个方程与从牛頓理論所得的方程的差别只在为值甚小的一項 $\alpha\sigma^2$。我們要用逐步逼近法来解这个方程。在零級的近似中,我們略去 $\alpha\sigma^2$ 这一項。余下的方程的解就是熟知的牛頓軌道

$$\sigma=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1+e\cos\varphi),$$

式中, p 是軌道参数, 而 e 則是偏心率; 長半軸是 $a=p/(1-e^2)$, 軌道的近日点与角 $\varphi=\pi$ 相应。

在高一級的近似中, 我們設 $\sigma=\sigma_0+\sigma_1$, 此处的 σ_0 是零級近似解。将 $\sigma=\sigma_0+\sigma_1$ 代入(11-70),我們求得 σ_1 的方程

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\alpha\sigma_0^2=\frac{\alpha}{p^2}(1+e\cos\varphi)^2=$$

$$=\frac{\alpha}{p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)+2e\cos\varphi+\frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right].$$

在右边括弧內所有的項中, 只有第二項引起軌道的可观察到的变迁; 由于共振(同齐次方程 $\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=0$ 的解共振),这一項引起連續增加的效应。仅仅保留这一項,我們得到非齐次方程的 σ_1 的特解:

$$\sigma_1=\frac{\alpha e}{p^2}\varphi\sin\varphi.$$

因此，在所要求的近似中，

$$\sigma=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}\left(1+e\cos\varphi+\frac{\alpha e}{p}\varphi\sin\varphi\right)\approx$$

$$\approx\frac{1}{p}\left[1+e\cos\varphi\left(1-\frac{\alpha}{p}\right)\right].\qquad(11\text{-}71)$$

由此我們看出，牛頓軌道是旋轉的；在行星轉一周以后，軌道的近日点要移动[1]

$$\delta\varphi=\frac{2\pi\alpha}{p}=\frac{6\pi km'}{c^2a(1-e^2)}.\qquad(11\text{-}72)$$

其次，我們考慮光綫在中心对称引力場內的路徑。这个路徑为相函数方程(10-71)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}=0$$

所决定，这个方程就是 $m=0$ 的哈密頓-雅可畢方程。因此对于光綫的軌道，在(11-69)中命 $m=0$，我們立即写出

$$\varphi=\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2M^2}-\frac{\epsilon}{r^2}}}\qquad(11\text{-}73)$$

（我們現在用光綫的頻率 $\omega_0=-\frac{\partial\psi}{\partial t}$ 来代替粒子的能量 $\mathscr{E}_0=\frac{\partial S}{\partial t}$）。

为了研究这个軌道，正如在前面一样，我們将(11-73)写成微分方程

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2=\frac{\omega_0^2}{c^2M^2}-\sigma^2+\frac{2km'}{c^2}\sigma^3,$$

或者，将它对 φ 微分，再引用常数 $\alpha=3km'/c^2$，而写成

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}=-\sigma+\alpha\sigma^2.\qquad(11\text{-}74)$$

---

[1] 从(11-72)計算出来的每世紀变化的数值对水星是 43.0″，对地球是 3.8″。天文学的观察的結果，水星是每世紀 42.6″±0.9″，地球是每世紀 4.6″±2.7″，与理論完美地符合。

略去为値甚小的項 $\alpha\sigma^2$，我們得到零級近似解

$$\sigma=\frac{\cos\varphi}{R}$$

(我們引入了符号 R：$1/R=\omega_0/cM$)，亦卽一条經过与原点相距为 R 之点的直綫 $r=R/\cos\varphi$ 为了求高一个近似解，我們將 $\sigma=\sigma_0+$ $+\sigma_1$ 代人(11-74) 这样，对于 σ_1，我們就找到了方程

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2}+\sigma_1=\alpha\sigma_0^2=\frac{\alpha}{R^2}\cos^2\varphi.$$

这个方程的一个特解是 $\sigma_1=\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi)$，因此我們得到光綫的軌道方程

$$\sigma=\frac{1}{r}=\frac{\cos\varphi}{R}+\frac{\alpha}{3R^2}(1+\sin^2\varphi). \qquad (11\text{-}75)$$

現在我們来决定这条曲綫在与中心相距甚远之处的方向。为此，我們可命 $r=\infty$ 或 $\sigma=0$，并且从所得的方程寻求得 φ：形式如 $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\Delta\varphi$ 的解，其中 $\Delta\varphi$ 是小的[注意到(11-75)中右边的第二項是小的]。略去高級量，得到

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi=\pm\frac{2\alpha}{3R}.$$

因此，光綫的軌道是一条曲綫，这条曲綫的两条漸近綫所夹之角是

$$\Delta\varphi=\frac{4\alpha}{3R}=\frac{4km'}{c^2R}. \qquad (11\text{-}76)$$

一条經过中心对称引力場而在与中心相距为 R 的光綫会偏轉，这个偏轉为上面的公式所决定（一条恰恰經过太阴的边緣的光綫所受到的折射为 $\Delta\varphi=1.75''$）。

§11-9. 能量-冲量廣張量

在沒有引力場存在时，物質(連同电磁場)的能量守恒定律和冲量守恒定律是以方程 (4-41) $\partial T_{ik}/\partial x^k=0$ 来表示的。这个方程

推广到有引力場的情形是方程(11-26)

$$T^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(T^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl}=0. \quad (11\text{-}77)$$

然而在这种形式中，这个方程，一般說来，并不表示任何守恒定律①。这种情况与下述事实有关，卽在引力場中，应該守恒的不是單独物質的四度冲量而是物質和引力場的四度总冲量；后者并未包含在 T^k_i 的式子之內。

为了决定守恒的、引力場和其中物質的四度总冲量，我們进行如下②。我們这样来选擇坐标系統，使在空間-时間的某一給定点上，所有 g_{ik} 的第一次导数都为零(这时，g_{ik} 可以不同于它的伽利略值)。那么，这样，在該点，方程(11-77)中的第二項消失，而在第一項中，可以将 $\sqrt{-g}$ 从微分符号內提出，因而留下的是

$$\frac{\partial}{\partial x^k}T^k_i=0,$$

或者，以逆变分量表示，

$$\frac{\partial}{\partial x^k}T^{ik}=0.$$

恒滿足这个方程的量 T^{ik} 可以写成下面的形式：

$$T^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\eta^{ikl},$$

---

① 事实上，积分 $\int T^k_i\sqrt{-g}\,dS_k$ 要守恒，就必須滿足条件 $\frac{\partial(\sqrt{-g}\,T^k_i)}{\partial x^k}=0$，而不是滿足(11-77)。在曲綫坐标中进行 §4-4 里在笛卡兒坐标中所作的一切計算就很容易証明这一点。除此以外，只須注意下面的事实就够了，这些运算是純形式的，与相应的量的張量特性无关，象高斯定理的証明一样，它在曲綫坐标中的形式(11-23)和在笛卡兒坐标的形式是一样的。

② 我們可能有这个意念，卽将公式(11-23)应用到引力場，将 $\Lambda=\frac{c^4}{16\pi k}G$ 代入。但是，我們着重指出，这个公式只能应用到以异于 g_{ik} 的量 q 来描写的物理体系；因此，这个公式不能应用到为 g_{ik} 本身所决定的引力場。注意，在(11-23)式中以 G 代 Λ 时，我們得到的不过是零而已，这一点从关系式(11-32)和眞空中的場方程可以直接看出。

式中，η^{ikl} 是对于指标 k, l 为反对称的量：

$$\eta^{ikl}=-\eta^{ilk}.$$

实际上，不难将 T^{ik} 化为这样的形式。为此我們从下面的場方程出發：

$$T^{ik}=\frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R\right),$$

对于 R^{ik}，按照(11-9)，我們有

$$R^{ik}=\frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m\partial x^n}+\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l\partial x^n}\right\}.$$

(値得提醒一下，在我們所考虑之点，所有 $\Gamma^i_{kl}=0$)。經过簡單的变換，張量 T^{ik} 可以化为下面的形式：

$$T^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^m}[(-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})]\right\}.$$

花括弧內的式子对于 k 和 l 是反对称的，这就是我們在上面用 η^{ikl} 来代表的量。旣然 g_{ik} 的第一次导数在所考虑之点为零，因子 $1/(-g)$ 可以从微分符号 $\partial/\partial x^l$ 下提出。我們引用符号

$$h^{ikl}=\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^m}[(-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})]; \qquad (11\text{-}78)$$

这些量对于 k 和 l 是反对称的：

$$h^{ikl}=-h^{ilk}. \qquad (11\text{-}79)$$

这时，我們可以写

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}=(-g)T^{ik}.$$

这个关系是在 $\partial g_{ik}/\partial x^l=0$ 的假設下导出的，在过渡到任意的坐标系統时仍然有效。在一般情形下，差 $\partial h^{ikl}/\partial x^l-(-g)T^{ik}$ 不等于零；我們用 $(-g)t^{ik}$ 来代表这个差。于是，根据定义，我們有

$$(-g)(T^{ik}+t^{ik})=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \qquad (11\text{-}80)$$

t^{ik} 对于 i 和 k 是对称的：

$$t^{ik}=t^{ki}. \tag{11-81}$$

这可以直接从它們的定义看出，因为張量 T^{ik} 和导数 $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ 都是对称的量①。按照引力方程，用 R^{ik} 表示 T^{ik}，并且利用 h^{ikl} 的表示式(11-78)，經过相当冗長的計算(这里从略)，可得到 t^{ik} 的式子如下：

$$\begin{aligned}t^{ik}=\frac{c^4}{16\pi k}\{&(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np}-\Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn}-\Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm})+\\&+g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np})+\\&+g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np})+\\&+g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})\}.\end{aligned} \tag{11-82}$$

t^{ik} 有一个本質上的特性，就是它們不构成一个張量；如果注意到在 $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ 内出现的是普通导数而不是协变导数，就不难直接証明这一点。然而，t^{ik} 是用量 Γ^i_{kl} 表示的，而后者对于坐标的綫性变换有張量的特性(見 § 10-5)，所以，同样的情况对于 t^{ik} 也能应用。

从定义(11-80)可以断定，$T^{ik}+t^{ik}$ 恒滿足方程

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik}+t^{ik})=0. \tag{11-83}$$

这表明，有量

$$P_i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{ik}+t^{ik})dS_k \tag{11-84}$$

的守恒定律存在。

在沒有引力場时，在伽利略坐标中，$t^{ik}=0$，而上面的积分化为 $\frac{1}{c}\int T^{ik}dS_k$，即化为物質的四度冲量。因此，(11-84)的量应当是物質和引力場的四度总冲量。t^{ik} 諸量的集合称为引力場的能量-冲量贋張量。

---

① 正是为了这点，在前面我們才将$(-g)$从 T^{ik} 的式子中对 x^l 的微分符号下提出来。否则，$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$ 对于 i 和 k 就不是对称的了，从而 t^{ik} 对于 i 和 k 就不是对称的了。

(11-84) 中的积分可以在包括整个三度空間的任何无穷大的超曲面上进行 (見 § 4-4 和 § 4-7)。假如我們选擇就超曲面 $x^0=$ 常数作为这个面,那么,P^i 可以写为一个三度空間的积分的形式:

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{i0}+t^{i0})dV. \tag{11-85}$$

象通常一样,$(-g)(T^{00}+t^{00})$ 这个量可以称为物質和場的总能量"密度",而 $\frac{1}{c}(-g)(T^{\alpha 0}+t^{\alpha 0})$则是总冲量密度的分量。后者(乘之以 c^2)也同时代表能量通量密度的分量,而$(-g)(T^{\alpha\beta}+t^{\alpha\beta})$ 則是冲量通量密度的分量。在沒有物質存在时,$T^{ik}=0$,因而引力場的能量密度可以表为 $(-g)t^{00}$ 的形式,而冲量密度則可以表为 $\frac{1}{c}(-g)t^{0\alpha}$ 的形式。

物質和場的四度总冲量用 $(-g)(T^{ik}+t^{ik})$ 的积分来表示,$(-g)(T^{ik}+t^{ik})$ 对于指标 i,k 是对称的,这个事实非常重要。它表明,有角动冲量矩守恒定律存在,冲量矩的定义是(見 § 4-7):

$$\begin{aligned}M^{ik}&=\int(x^i dP^k-x^k dP^i)=\\&=\int\{x^i(T^{kl}+t^{kl})-x^k(T^{il}+t^{il})\}(-g)dS_l.\end{aligned} \tag{11-86}$$

因此,在引力場中,总冲量矩守恒定律仍然有效[1]。

选擇这样的一个坐标系統,使其在指定的体积元內为伽利略坐标,这时我們就能够使所有的 t^{ik} 在空間-时間的任意一点为零(因为这时所有的 Γ^i_{kl} 为零)。另一方面,在欧氏空間中,即在沒有引力場出现时,只要我們用曲綫坐标代替笛卡兒坐标,我們就能

[1] 必須指出,我們所求得的物質和場的四度冲量的表示式,絕不是唯一可能的。恰恰相反,我們有无穷多的方法(可以参看,例如,本节的習題)来造出这些表示式,这些表示式在沒有場存在时化为 T^{ik},而当对表示 dS_k 积分时則得到一些守恒量。雖然这些积分,即物質和場的总能量和总冲量这时当然是一样的,但是冲量和能量在空間的密度分布却是不同的。然而,我們所作的能使得場的能量-冲量贋張量为对称的选擇是唯一的,因而可能定出冲量矩守恒定律(在本質上,这与在 § 4-7 中的情况是一样的)。

得到不等于零的 t^{ik}。因此，在任何情形下，談空間某处的引力場的能量是沒有意义的。假如張量 T_{ik} 在某一世界点为零，那么，在任何其他参考系統中也是这样，因而我們可以談在这一点沒有物質或电磁場。相反地，从一个贋張量在一个参考系統的某一点为零的事实，根本就不能断定，在另外一个参考系統中也是如此，因此，談在某个地方到底有沒有引力能是无意义的。它完全与下面的事实相应，即只要坐标选擇得适当，我們能够"消灭"在一給定体积元内的引力場，同时，根据我們在上面所說的，贋張量 t^{ik} 在这个体积元内也将消失。

但是量 P^i(物質和場的四度冲量)却有完全肯定的意义，在根据物理的考虑所必須的程度上，与参考系統的选擇无关。讓我們繞着我們正在研究的質量划出空間的一个区域，这个区域要足够大，使我們能够認为在这个区域以外沒有引力場。在时間的过程中，这个区域在四度空間-时間内割出一条"通道"。在这个"通道"以外，場是不存在的，因而四度空間是平坦的。由于这个原因，在計算場的能量与冲量时，显然我們必須这样来选擇四度参考系統，使得在"通道"以外，坐标系統为伽利略系統，而所有的 t^{ik} 都为零。根据这个要求，参考系統的确定当然絕不是唯一的，它在"通道"以内还可以被任意地选擇。然而，完全与量 P^i 的物理意义一致，它們与"通道"内坐标系統的选擇完全无关。假設有两个坐标系統，在"通道"内是不同的，但在"通道"以外，这两个坐标系統是同一个伽利略坐标系統，我們来比較在这两个系統内的四度冲量 P^i 和 P'^i 在不同的"瞬間" x^0 和 x'^0 的値。我們引用第三个坐标系統，这个坐标系統在 x^0 的一瞬間在"通道"内与第一个系統重合，在 x'^0 的一瞬間与第二个系統重合，而在"通道"以外，則与同一个伽利略坐标系統重合。根据能量守恒和冲量守恒定律，量 P^i 是不变的($\partial P^i/\partial x^0=0$)。这对于第三个坐标系統是如此，对于前两个也

是如此，从此可以断定 $P^i=P'^i$，这即是要証明的。

前面已經提过，量 t^{ik} 对于坐标的綫性变换来説是一个張量。因此，P^i 对于这样的变换构成一个矢量，就特例言之，它对于洛倫兹变换就构成一个矢量。将(11-80)代入(11-84)，我們求得

$$P^i=\frac{1}{c}\int\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}dS_k=\frac{1}{2c}\int\left(dS_k\frac{\partial}{\partial x^l}-dS_l\frac{\partial}{\partial x^k}\right)h^{ikl}.$$

利用(1-36)式，这个积分可以化为在普通曲面上的积分：

$$P^i=\frac{1}{c}\oint h^{ikl}df^*_{kl}. \tag{11-87}$$

假如我們选擇超曲面 $x^0=$ 常数作为 (11-84) 中积分面，那么，(11-87) 中的积分面就变为普通空間中的一个曲面①。因此，我們求出了物質和引力場在三度空間的某一个区域内的四度冲量的表示式，这个表示式是在包圍这个体积的曲面上的积分：

$$P^i=\frac{1}{c}\oint h^{i0\alpha}df_\alpha. \tag{11-88}$$

在引用这个公式去計算物質和場的四度总冲量时，我們必須記着，按照上面所說的，空間坐标系統应当如此选擇，使在无穷远处(在无穷远处空間是欧氏的)坐标系統变为笛卡兒坐标系統。

将公式(11-88)应用于經常在坐标原点附近的孤立物体系，我們可以为积分选擇距离物体十分远的积分面，使在其上的引力場为間隔的表示式(11-61)所决定。計算的結果是

$$P^\alpha=0,\quad P^0=mc, \tag{11-89}$$

式中，m 是系統的总質量，这是我們所自然期待的結果。这是通常所説的"引力"質量等于"慣性"質量的表示式（由物体产生的引

① df^*_{kl} 这个量是"垂直"于面元的，它与"切面"元 df^{ik} 的关系是(1-33)：$df^*_{ik}=\frac{1}{2}e_{iklm}df^{lm}$。在包圍垂直于 x^0 軸的超曲面的面上 df^{lm} 的不为零的分量仅仅是 $l,m=1,2,3$ 的那些分量，因此 df^*_{ik} 只有那些 i 和 k 之中有一个为零的分量。分量 $df^*_{0\alpha}$ 就是普通曲面的三度元的分量，我們簡以 df_α 表之。

力場所决定的質量称为"引力"質量．它就是出現在引力場內的間隔的表示式中的質量，或者，就特例而言，在牛頓定律中的質量；决定一个物体的冲量与能量之比的質量称为"慣性"質量，而就特例言之，一个物体的靜止能量等于这个質量乘以 c^2)。

在恒定引力場的情形里，可能求出物質和場的总能量的一个簡單表示式，这个表示式是在物質所占据的空間內的积分。为了得到这个表示式，我們可以比方說，从下面的恒等式出發，不难証明，这个恒等式当所有的量都与 x^0 无关时成立[1]：

$$R_0^0=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}\;g^{i0}\Gamma^\alpha_{0i}\right).$$

将 $R_0^0\sqrt{-g}$ 在三度空間內积分，引用三度空間的高斯定理，得到

$$\int R_0^0\sqrt{-g}\;dV=\oint\sqrt{-g}\,g^{i0}\Gamma^\alpha_{0i}\,df_\alpha.$$

我們选擇一个足够远的积分面，在其上我們用由公式(11-61)給出的 g_{ik} 的表示式，經过簡單計算后，得到

$$\int R_0^0\sqrt{-g}\;dV=-\frac{4\pi k}{c^2}m,$$

就是說，我們所写的积分等于 $-4\pi kP^0/c^3$。同时要注意，按照場的方程

$$R_0^0=\frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0-\frac{1}{2}T\right)=\frac{4\pi k}{c^4}\left(T_0^0-T_1^1-T_2^2-T_3^3\right),$$

---

[1] 从(11-15)我們可得

$$R_0^0=g^{0i}R_{i0}=g^{0i}\left(\frac{\partial\Gamma^l_{i0}}{\partial x^l}+\Gamma^l_{i0}\Gamma^m_{lm}-\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{0m}\right),$$

利用(10-52)和(10-55)，我們發現此式可写为

$$R_0^0=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}\,g^{0i}\Gamma^l_{i0}\right)+g^{im}\Gamma^0_{ml}\Gamma^l_{i0}.$$

利用同一关系式(10-55)，不难証明，恒等式右边的第二項是 $-\frac{1}{2}\Gamma^0_{lm}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$，而根据所有的量与 x^0 无关的假設，这一項应該为零。最后，同理，在第一項中以对 α 求和代替对 l 求和，我們便得到正文中的公式。

我們就得到所要求的公式

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int (T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_0^0) \sqrt{-g}\, dV. \qquad (11\text{-}90)$$

这个公式是用物質本身的能量-冲量張量来表示物質和恒定引力場的总能量（即是物体的总質量）（P. 托尔曼，1930 年）。我們記得，在中心对称場的情形下，我們还有同一个量的另外一个表示式，即公式(11-65)。

習　題

利用公式(4-42)，求物質和引力場的四度总冲量的表示式。

解：在曲綫坐标中，代替(4-38)，我們有 $S = \int \Lambda \sqrt{-g}\, dV\, dt$，因此，为了得到一个守恒的量，我們必須在(4-42)中以 $\Lambda\sqrt{-g}$ 代替 Λ，因此，四度冲量有下面的形式：

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ \Lambda\sqrt{-g}\, \delta_i^k - \sum \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right\} dS_k.$$

在应用这个公式到物質时，（对于这个物質，$q^{(l)}$ 与 g_{ik} 不同），我們可以将 $\sqrt{-g}$ 从微分符号下提出，积分号内的式子等于 $\sqrt{-g}\, T_i^k$，此处的 T_i^k 是物質的能量-冲量張量。当我們应用同一公式到引力場时，我們必須使 $\Lambda = \frac{c^4 G}{16\pi k}$，而 $q^{(l)}$ 是度規張量 g_{ik} 的分量。場和物質的四度总冲量因此等于

$$P_i = \frac{1}{c} \int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left[G\sqrt{-g}\, \delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

利用 G 的表示式(11-20)，可以将上式变为

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \frac{c^4}{16\pi k} \left[G\sqrt{-g}\, \delta_i^k + \Gamma_{lm}^k \frac{\partial(g^{lm}\sqrt{-g})}{\partial x^i} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Gamma_{ml}^l \frac{\partial(g^{mk}\sqrt{-g})}{\partial x^i} \right] \right\} dS_k.$$

在花括号内的第二项是引力場在没有物質时的四度冲量。被积分函数对于指标 i, k 是不对称的，因此我們不能得到冲量矩守恒定律。

§11-10. 引力波

現在我們来研究真空中的弱引力場。在弱引力場中，空間-时間度規是"近欧基里德的"，就是說，我們能够选擇一个参考系統，在这个系統中，度規張量 g_{ik} 差不多等于它們的伽利略値，g_{ik} 的伽利略値可以用下面各式表示：

$$g^{(0)}_{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta},\quad g^{(0)}_{\alpha 0}=0,\quad g^{(0)}_{00}=-1. \tag{11-91}$$

因此，我們可以将 g_{ik} 写成下面的形式：

$$g_{ik}=g^{(0)}_{ik}+h_{ik}, \tag{11-92}$$

式中，h_{ik} 是由引力場所决定的小的修正。

用 g_{ik} 的导数表示的 Γ^i_{kl} 的分量在 h_{ik} 很小时，也是很小的。略去 h_{ik} 的比一次高的項，我們可以只保留張量 R_{iklm}(11-9)中第一个括号內的項：

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k\partial x^m}\right). \tag{11-93}$$

对于縮并張量 R_{ik}，准确到同等的程度，我們有

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}\simeq g^{(0)lm}R_{limk},$$

或者

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\left(-g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\partial x^m}+\frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 h}{\partial x^i\partial x^k}\right), \tag{11-94}$$

其中，

$$h^k_i=g^{(0)lk}h_{il},\quad h=h^i_i.$$

我們这样来选擇参考系統，使 g_{ik} 与 $g^{(0)}_{ik}$ 相差甚微。但是这个条件对于任何无限小的坐标变換也是滿足的，因此我們还能对于 h_{ik} 加上四个(与坐标数相等的)条件，而同时并不違背 h_{ik} 是很小的这个条件。

我們选定方程

$$\frac{\partial\psi^k_i}{\partial x^k}=0,\quad \psi^k_i=h^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i h. \tag{11-95}$$

作为这些辅助条件①。

这时 R_{ik} 内的后三項彼此消去，我們得到

$$R_{ik}=-\frac{1}{2}g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\partial x^m}.$$

因此，眞空中的引力場方程(11-37)具有以下的形式：

$$\Box h_i^k=0, \tag{11-96}$$

其中，$\Box$是达朗貝尔算符：

$$\Box=-g^{(0)lm}\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^m}=\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

这就是普通的波动方程。因此，引力場也同电磁場一样，以光速在眞空中傳播。

我們来研究一个平面引力波。在这样的波内，場仅沿着空間的一个方向变化；我們选擇軸 $x^1=x$ 在这个方向。方程(11-96)这时变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_i^k=0, \tag{11-97}$$

它的解是 $x\pm ct$ 的任意函数(見§6-2)。

我們来研究向 X 軸正方向傳播的波。在波内，所有的 h_i^k 都是 $x-ct$ 的函数。輔助条件(11-95)在这种情形下給出 $\dot{\psi}_i^1-\dot{\psi}_i^0=0$，此处符号上的一点表示对 t 的微分。这个等式只須去掉微分符号就积分好了，积分常数可以設为零，因为我們所感兴趣的只是場的可变部分(正如电磁波的情形一样)。因此，ψ_i^k 的各分量之間有关系式

$$\psi_1^1=\psi_1^0,\quad \psi_2^1=\psi_2^0,\quad \psi_3^1=\psi_3^0,\quad \psi_0^1=\psi_0^0. \tag{11-98}$$

---

① 假如我們尋求其形式如 $x'^i=x^i+\xi^i$ (ξ^i 是与 h_i^k 同数量級的小量)的导出滿足这些条件的 h_i^k 的变换，那么，不难証明，这个变换的函数 ξ^i 应当滿足方程

$$\Box\xi_i=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(h_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k h\right),$$

其中，$\xi_i=g_{ik}^{(0)}\xi^k$。由此可見，例如，一个滿足条件(11-95)的坐标系統可以再受到任何无限小的变换 $x'^i=x^i+\xi^i$，此处方程 $\Box\xi_i=0$ 对于 ξ^i 有效。此外，坐标系統显然可以受到任意的洛倫玆变换。

在第 359 頁的脚注中已經指出，条件(11-95)也还不能唯一地决定参考系統。就是說，我們还可以給坐标以形式如 $x'^i=x^i+\xi^i(x-ct)$ 的变换；这样的变换并不違背条件(11-95)，因为 ξ^i 满足方程 $\square\xi_i=0$(見同一脚注)。这些变换可以用来使四个量 ψ_1^0，ψ_2^0，ψ_3^0，$\psi_2^2+\psi_3^3$ 化为零；从等式(11-98)可以推断，这时分量 ψ_1^1，ψ_2^1，ψ_3^1，ψ_0^0 也化为零。至于余下的量 ψ_2^3，$\psi_2^2-\psi_3^3$，无論怎样选擇参考系統也不能化为零，因为，不难証明，这些分量在 $x'^i=x^i+\xi^i(x-ct)$ 的变換下一般不改变。我們注意，$\psi=\psi_i^i$ 这时也为零，所以 $\psi_i^k=h_i^k$。

因此，平面引力波为 h_{23}，$h_{22}-h_{33}$ 两个量所决定。換句話說，引力波是横波，波的極化为 YZ 平面內的二阶对称張量所决定，这个張量的对角綫的分量之和 $h_{22}+h_{33}$ 为零。

引力波具有一定的能量，能量"密度"是 $(-g)t^{00}$。象每种能量一样，它反过来又产生一定的引力場。因此，引力波繞着它本身产生一定的附加引力場。这个場同波本身的場比較起来是一个二級小量，因为产生它的能量是二級小量(导数 $\partial g_{ik}/\partial x^l$ 是关于 h_{ik} 的一級小量，因此按照(11-82)，t^{ik} 是二級小量)。

我們来計算平面引力波內的能量通量。在上一节中，我們已經知道，引力場的能量通量为量 $ct^{0\alpha}(-g)$ 所决定。在一个沿着 x^1 軸傳播的波內，显然只有分量 t^{10} 不为零。

我們已經証明，贋張量 t^{ik} 是二級小量；我們来計算有这样的准确度的 t^{10}。利用普遍公式(11-82)，再利用下面的事实，即在一个平面波內張量 h_{ik} 的分量之中异于零者是 h_{23}，$h_{22}=-h_{33}$，計算的結果是

$$t^{01}=-\frac{c^2}{32\pi k}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial x}\frac{\partial h_{22}}{\partial t}+\frac{\partial h_{33}}{\partial x}\frac{\partial h_{33}}{\partial t}+2\frac{\partial h_{23}}{\partial x}\frac{\partial h_{23}}{\partial t}\right).$$

假如所有的量仅仅是 $x-ct$ 的函数，那么，由此我們最后得到

$$t^{01}=\frac{c^3}{32\pi k}\left[\dot{h}_{23}^2+\frac{1}{4}(\dot{h}_{22}-\dot{h}_{33})^2\right]. \tag{11-99}$$

§ 11-11. 弱引力場

其次，讓我們来研究一个弱的引力場，运动速度比光速小很多的任意的物体所产生的。

由于物質的存在，引力場方程将不同于簡單的波动方程 $\Box h_i^k=0$ (11-96)，其差异在于等式之右边存在有从物質的能量-冲量張量而来的項。我們将这些方程写成

$$\frac{1}{2}\Box\psi_i^k=-\frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k, \tag{11-100}$$

式中，我們引用了对于这种情形更便利的量 $\psi_i^k=h_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k h$ 来代替 h_i^k，而 τ_i^k 則代表輔助量，这些輔助量是当在准确方程 $R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k R=\frac{8\pi k}{c^4}T_i^k$ 中过度到所考虑的近似中的弱場的情形时得来的。不难証明，从 T_i^k 之中分出我們感兴趣的数量級的量，分量 τ_0^0 和 τ_α^0 就可以直接从相应的分量 T_i^k 得来；至于分量 τ_β^α，它們除了包含从 T_β^α 得来的項外，还包含从 $R_i^k-\frac{1}{2}\delta_i^k R$ 得来的二級小量的項。

ψ_i^k 滿足条件 (11-95) $\partial\psi_i^k/\partial x^k=0$。从 (11-100) 可以推断，同样的方程对于 τ_i^k 也成立：

$$\frac{\partial\tau_i^k}{\partial x^k}=0. \tag{11-101}$$

这个方程在这里就代替了普遍关系式 $T_{i;k}^k=0$。

首先我們来决定在一个弱引力場中在与产生場的物体系統相距不太远之处的空間-时間度規（这个距离比物体系統的綫度 a 为大，但比物体所輻射的引力波的波長 $\lambda\sim a\frac{c}{v}$ 为小）。在一級近似中，我們可以略去 (11-100) 中含有对时間的导数 $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi_i^k}{\partial t^2}\right)$ 和 $1/c^2$

的那些項，而在 τ_i^k 的所有分量之中，我們可以認为只有一个分量 $\tau_0^0=-\mu c^2$ 不为零[见(11-39)]，这一个分量含有 c^2(其余的含有物体速度的一次或二次方)。于是我們得到

$$\Delta\psi_\alpha^\beta=0,\quad \Delta\psi_0^\alpha=0,\quad \Delta\psi_0^0=\frac{16\pi k}{c^2}\mu. \qquad (11\text{-}102)$$

我們应当寻求这些方程的在无穷远处变为零(伽利略度規)的解。因此，从前两个方程可以断定，$\psi_\alpha^\beta=0$, $\psi_0^\alpha=0$。将第三个方程与牛頓引力势 φ 的方程(11-40)相比較，我們求得 $\psi_0^0=4\varphi/c^2$。从此，我們得到張量 $h_i^k=\psi_i^k-\frac{1}{2}\psi\delta_i^k$ 的分量的值如下：

$$h_\alpha^\beta=-\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta,\quad h_0^\alpha=0,\ h_0^0=\frac{2}{c^2}\varphi. \qquad (11\text{-}103)$$

对于間隔，我們得到

$$ds^2=\left(1+\frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2+dy^2+dz^2), \qquad (11\text{-}104)$$

式中的第二項决定弱引力場(牛頓引力場)內的空間度規。

我們看出，关于 φ 的一級量的修正項不仅包含在 g_{00} 之內，也包含在 $g_{\alpha\beta}$ 之內；在 § 10-8 中，已經証明了，在粒子(运动速度 $v\ll c$)的运动方程中，$g_{\alpha\beta}$ 內的修正項比起从 g_{00} 發生的修正項来是更高級的小量；正是因为这个緣故，所以在 § 10-8 中，我們只能决定 h_{00}。

至于度規張量的混合分量 g_0^α，在現在的近似情形中，它們都是零。在高一級的近似情形中，为确定 $g_0^\alpha=h_0^\alpha=\psi_0^\alpha$ 各量，我們有方程

$$\Delta g_{\alpha 0}=-\frac{16\pi k}{c^4}\tau_{\alpha 0}.$$

在此式中代入 $\tau_{\alpha 0}=\mu c^2 u_0 u_\alpha\cong-\mu c v_\alpha$，其中 $\mathbf{V}$ 是普通的三度速度，并且引用三度向量 $\mathbf{g}$，其分量为 $g_\alpha=-\frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}}\cong g_{\alpha 0}$，那么，我們便得到

$$\Delta g = \frac{16\pi k}{c^3}\mu V. \qquad (11\text{-}105)$$

在距离甚远(同物体的綫度比較)之处，与方程(5-53)的解(5-59)相类似，我們可以直接写出

$$g = -\frac{2k}{c^2 R_0^3}M \times R_0, \qquad (11\text{-}106)$$

式中，$M = \int r \times \mu V dV$ 是物体的冲量矩①。

在§10-10的習題1中已經証明，在 $g_{0\alpha}$ 异于零的引力場中，有"科里奥利力"作用于粒子上，这个力同作用于在以角速度 $\Omega = \frac{c}{2}\sqrt{h}\,\mathrm{rot}\, g$ 旋轉的物体上的粒子上的一样。因此，我們可以說，在由旋轉物体(冲量矩为 M)所产生的引力場中，有一个力作用在粒子上，这个力同下面的角速度 Ω 旋轉时出現的科里奥利力相等，而

$$\Omega \cong \frac{c}{2}\mathrm{rot}\, g = \frac{k}{c^2 R_0^5}[R_0^2 M - 3R_0(M \cdot R_0)],$$

[$h \cong 1$, g 取自(11-106)]。

習　題

在牛頓近似情况下計算引力場的作用量。

解　用(11-104)中的 g_{ik}，按普遍公式(11-20)来計算 $G = -\frac{4}{c^2}(\nabla\varphi)^2$，因此場的作用量是

$$S_g = -\frac{1}{4\pi k}\int (\nabla\varphi)^2 dV dt.$$

場加上以密度 μ 在空間分布的質量的总作用量是

$$S = \int\int\left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{4\pi k}(\nabla\varphi)^2\right]dV dt.$$

不难証明，S 对于 φ 的变分导出泊松方程(11-40)。

① 假如我們由普遍公式(11-86)和公式(11-106)中的 $g_{0\alpha}$ 来計算引力場和物質的总冲量矩，那么，我們恰好得到量 M。这表明，方程(11-106)正确地决定与物質相距甚远之处的 $g_{0\alpha}$，甚至上物質甚近从而該处的場根本不能当作是弱場的情形也可以，然而这时 M 不是單独物体的冲量矩，而是物体加上引力場的冲量矩(假如場在处处都是弱的，那么，它的冲量就可以略去)。

§11-12. 引力波的輻射

运动的物体以引力波的形式所輻射出的能量的計算，要決定在“波区”的引力場，就是在距离比輻射波波長大很多的地方的引力場。

在原理上，所有的計算完全与对电磁波所作的計算相似。弱引力場的方程(11-100)在形式上与推迟势的方程(§8-1)完全一样。因此，我們立刻能够写出它的通解如下：

$$\psi_i^k=\frac{4k}{c^4}\int(\tau_i^k)_{t-\frac{R}{c}}\frac{dV}{R}. \qquad (11\text{-}107)$$

既然体系内的所有物体的速度很小，那么，我們就能够写出与体系相距甚远之处的場(見§9-1和§9-2)：

$$\psi_i^k=\frac{4k}{c^4R_0}\int(\tau_i^k)_{t-\frac{R_0}{c}}dV, \qquad (11\text{-}108)$$

式中，R_0是到原点的距离，原点被选擇在体系内的任意一点。为簡單起見，从此以后我們将略去在被积分函数内的指标$t-R_0/c$。

为了計算这些积分，我們利用(11-101)。略去τ_i^k的指标，分开空間和时間分量，我們将(11-101)写成

$$\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial\tau_{\alpha0}}{\partial x^0}=0,\quad \frac{\partial\tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial\tau_{00}}{\partial x^0}=0. \qquad (11\text{-}109)$$

用x^β乘第一式，然后对整个空間积分，則得

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int\tau_{\alpha0}x^\beta dV=\int\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma}x^\beta dV=\int\frac{\partial(\tau_{\alpha\gamma}x^\beta)}{\partial x^\gamma}dV-\int\tau_{\alpha\beta}dV.$$

既然在无穷远处$\tau_{ik}=0$，右边的第一个积分，在經过高斯定理的变換后即消失。取余下来的方程和經过指标互換的这个方程之和，乘以1/2，我們便求得

$$\int\tau_{\alpha\beta}dV=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int(\tau_{\alpha0}x^\beta+\tau_{\beta0}x^\alpha)dV.$$

其次，用$x^\alpha x^\beta$乘(11-109)中的第二个方程，然后再对整个空間积

分。相似的变換导出

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{00}x^\alpha x^\beta dV = -\int (\tau_{\alpha 0}x^\beta + \tau_{\beta 0}x^\alpha)dV.$$

将所得的两个結果加以比較，我們求得

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}\int \tau_{00}x^\alpha x^\beta\, dV. \qquad (11\text{-}110)$$

因此，所有 $\tau_{\alpha\beta}$ 的积分可以表为仅包含分量 τ_{00} 的积分。但是在 § 11-11 中已經証明，在現在的近似情形下，这个分量簡單地等于張量 T_{ik} 的相应的分量 T_{00}:

$$\tau_{00} = -\tau_0^0 = \mu c^2.$$

将它代入(11-110)，并且引用时間 $t = x^0/c$，对于(11-108)，我們求得

$$\psi_{\alpha\beta} = \frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta dV. \qquad (11\text{-}111)$$

在与物体体系相距甚远之处，我們可以認为波(在不大的空間区域内)是平面波。因此，我們利用(11-99)式可以計算出体系輻射的能量的通量，例如沿着 x^1 軸方向的能量通量。

在公式(11-99)内有分量 $h_{23} = \psi_{23}$ 和 $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$。从(11-111)，我們求出它們的表示式

$$h_{23} = \frac{2k}{3c^4 R_0}\ddot{D}_{23},\quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33})$$

(符号上的一点表示对时間的微分)，此处我們引入了張量

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu(3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta}x_\gamma^2)dV, \qquad (11\text{-}112)$$

这是質量的"四極矩"張量(見 § 11-6)。結果我們求得沿着 x^1 軸的能量通量如下:

$$t^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2\right]. \qquad (11\text{-}113)$$

知道了在 x^1 軸方向的輻射以后，就不难决定在任意方向的輻射，这个任意方向的單位矢量用 $\mathbf{n}$ 来代表。为此，我們应当由張量 $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ 和矢量 n_α 的分量造出一个标量，这个标量是 $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ 的二次式，

当 $n_1=1, n_2=n_3=0$ 时，这个 $\dddot{D}_{\alpha\beta}$ 的二次式化为

$$\dddot{D}_{23}^2+\frac{(\dddot{D}_{22}-\dddot{D}_{33})^2}{4}.$$

結果，輻射到立体角 do 內的能量强度等于

$$dI=\frac{k}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta)^2+\frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2-\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma\right]do. \quad (11\text{-}114)$$

沿所有方向的总輻射，即体系在單位时間內的能量損失 $\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right)$，可以将能量通量对所有方向求平均値，然后将所得的結果乘以 4π 得之。利用第 230 頁的脚注中的公式，就很容易进行求平均値的計算。求平均値的結果，得到能量損失的公式如下：

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{k}{45c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2. \quad (11\text{-}115)$$

必須指出，这个能量损失的数值，甚至对天文学的客体也是这样的小，以致对运动的影响，即使經过了宇宙的时間間隔，也是可以略去不計（例如：双星在一年內的能量損失的数量級为其总能量的 10^{-12}）。

$d\mathscr{E}/dt$ 的表示式包含 $1/c^5$。这就是說，一个孤立系的能量損失仅在关于 $1/c$ 的五級近似中出現。在前四个近似中，体系的能量保持不变。从此可以推断，一个在引力場內的物体体系可以用拉格朗日函数来描述，其准确度是到数量級为 v^4/c^4 的項；这与电磁場的情形不同，在电磁場的情形中，拉格朗日函数仅仅准确到二級項（后者与这个事实有关，电磁輻射能量損失含有 $1/c^3$）。然而，拉格朗日函数中的这些多余的項所产生的影响是完全可以略去的 ①。

① 我們不推导，而直接写出在二級近似中相互吸引的粒子的体系的拉格朗日函数

$$L=\sum_A\frac{m_A v_A^2}{2}\left(1-3\sum_{B\neq A}\frac{km_B}{c^2R_{AB}}\right)+\sum\frac{m_Av_A^4}{8c^2}+\sum_{A\neq B}\frac{km_Am_B}{2R_{AB}}+$$
$$+\sum_{\substack{A\neq B\\A\neq C}}\frac{k^2m_Am_Bm_C}{2c^2R_{AB}R_{AC}}+\sum_{A\neq B}\frac{km_Am_B}{2c^2R_{AB}}\{7\mathbf{V}_A\cdot\mathbf{V}_B+(\mathbf{V}_A\cdot\mathbf{n}_{AB})(\mathbf{V}_B\cdot\mathbf{n}_{AB})\},$$

式中，$\mathbf{n}_{AB}$ 是在粒子 m_A 和 m_B 之間的矢徑 $\mathbf{R}_{AB}$ 方向上的單位矢量。

習　題

两个物体按照牛頓定律相吸，并繞着共同的慣性中心作圓周运动。求两个物体因引力波輻射而損失能量所引起的相互接近的速度。

解 假如 m_1 和 m_2 是物体的質量，r 是它們之間的距离（对于圓周运动它是常量），利用(11-115)式作計算，则得

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{32k}{5c^5}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2 r^4\omega^6,$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$，T 是旋轉的周期。頻率 ω 与 r 的关系式是 $\omega^2r^3=k(m_1+m_2)$。既然 $\mathscr{E}=-\frac{km_1m_2}{2r}$，那么，$\dot{r}=\frac{2r^2}{km_1m_2}\frac{d\mathscr{E}}{dt}$，于是我們最后得到

$$\dot{r}=-\frac{64k^3m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5r^3}.$$

§ 11-13. 各向同性的空間

我們来将引力方程应用于在整个領域內完全是均匀的和各向同性的空間。这就是說，我們能够这样来选擇"世界"时間，使得在每一瞬間，空間的度規在所有的点上和在所有的方向上都是一样的。換句話說，空間有完全的对称性。当然，这时我們自然而然地假設了物質的密度（在"世界"时間的每一时刻）在整个空間都是不变的①。

首先我們为各向同性的空間在"世界"时間的确定时刻造出一个空間度規。換句話說，我們应当找出用坐标微分来表示的空間距离元 dl 的表示式，亦即决定在普遍公式

① 假如我們引用下面得到的結果，那么，所涉及的应該是在"大范圍"內研究的空間特性，星球和星系（例如銀河系或河外星云）中的物質堆积所引起的局部不均匀性略而不計。因此，所謂物質密度，应当了解为綫度比星云間的距离大很多的空間区域內的平均值。

虽然根据现有的天文数据，可以假定这个密度是均匀的，但是这个假設不免只有近似的性質；到底这种情况在新数据出現后能否甚至在定性上有变化，这仍然是一个問題，至于引力方程的解的基本特性与实际情形符合到什么程度，这也是一个問題。

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{11-116}$$

中的張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的分量。我們用 $\gamma_{\alpha\beta}$ 表示三度空間的度規張量，以与四度度規張量 g_{ik} 相区別。

空間的曲率完全为空間的三度曲率張量所決定，我們用 $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ 来代表它，以与四度曲率張量 R^i_{klm} 相区別（張量 $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ 的特性当然完全与張量 R^i_{klm} 相似）。在完全各向同性的情况下，張量 $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ 显然应当只用度規張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 来表示。因此，从 $P^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ 的对称性（見§ 11-2）很容易看出，它应当有下面的形式

$$P^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \lambda(\delta^\alpha_\gamma \gamma_{\delta\beta} - \delta^\alpha_\delta \gamma_{\gamma\beta}), \tag{11-117}$$

式中，λ 是某一常数。相应地，二阶張量 $P_{\alpha\beta} = P^\gamma_{\alpha\gamma\beta}$ 等于

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \tag{11-118}$$

而标准曲率

$$P = 6\lambda. \tag{11-119}$$

因此，我們看出，各向同性空間的曲率特性完全可用一个常数 λ 来决定。与此相应，对于空間度規共有三个重要的可能情形：(1)所謂恒定正曲率空間（与正的 λ 值相应），(2)恒定負曲率空間（与 $\lambda<0$ 的情形相应），(3)零曲率空間（与 $\lambda=0$ 的情形相应）。最后一个当然是平坦空間，即欧氏空間。

为了研究度規，最便利的是从几何的相似出發，将各向同性的三度空間的几何看作是在某个虛构的四度空間[①]内的一个各向同性的超曲面上的几何。超球是这样的一个曲面；与它相应的三度空間是恒正曲率空間。四度空間 x_1, x_2, x_3, x_4 内的超球（半徑为 a）的方程如下：

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

在其上的綫元可以表示为

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

① 这个四度空間当然与四度的空間-时間毫无关系。

将 x^1, x^2, x^3 看作是三个空間坐标，利用第一个方程，从 dl^2 中消去虛构坐标 x^4，我們得到空間距离元如下：

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \quad (11\text{-}120)$$

从这个式子不难計算(11-118)中的常数 λ。既然我們早已知道 $P_{\alpha\beta}$ 在整个空間都有(11-118)的形式，那么，只須計算它在原点附近的一点上的值就够了，在这一点上，$\gamma_{\alpha\beta}$ 等于

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

因为 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的一次导数，从而 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$，在原点为零，所以根据普遍公式(11-15)来計算是很簡單的，結果得到

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \quad (11\text{-}121)$$

我們可以称 a 为空間的"曲率半徑"。我們引用相应的"球"坐标 r, θ, φ 来作坐标 x^1, x^2, x^3。这时，綫元的表示式将有如下的形式：

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \quad (11\text{-}122)$$

坐标原点当然可以选擇在空間的任何一点。在这些坐标中，圓的周長是 $2\pi r$，而球的表面积是 $4\pi r^2$。圓(或球)的"半徑"等于 $\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}$，即大于 r。因此，在这个空間中，圓周与半徑之比将小于 2π。

在用角"χ"按照 $r = a\sin\chi$(χ 是在从 0 到 2π 的范圍内改变)代替 r 所得到的四度球坐标[1]中，dl 有另一个便利的形式。这时，

[1] 笛卡兒坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 与四度球坐标 a, θ, φ, χ 有下面的关系：

$$x_1 = a\sin\chi\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = a\sin\chi\sin\theta\sin\varphi,$$

$$x_3 = a\sin\chi\cos\theta, \qquad x_4 = a\cos\chi.$$

$$dl^2=a^2[d\chi^2+\sin^2\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2+d\theta^2)].\qquad(11\text{-}123)$$

坐标 χ 决定到原点的距离，这个距离 $a\chi$。在这些坐标中的球的表面积是 $4\pi a^2\sin^2\chi$。我們看出，当我們从坐标原点离开时，球的面积随之而增加，在离开到 $\pi a/2$ 的距离时，球的面积达到了最大值 $4\pi a^2$。从此以后，这个面积开始减小，在空間的"对立極点"，与原点相距为 πa（在这样的空間内它是一般可能存在的最大距离），球的面积化为一点[所有这些，只要我們注意到坐标 r 不能取大于 a 的值，就可以从(11-122)看出]。

按照(11-123)式，一个有正曲率的空間的体积

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}a^3\sin^2\chi\sin\theta\, d\chi\, d\theta\, d\varphi,$$

由此可得

$$V=2\pi^2a^3.\qquad(11\text{-}124)$$

因此，一个有正曲率的空間是"自己封閉的"——有限的，但是，不言而喻，它沒有界限。

值得指出，在封閉空間中，总电荷是零。事实上，在一个有限空間中，每个封閉曲面在它的本身的两边包圍着空間的一个有限区域。因此，一方面，电場經过这个曲面的通量等于在这个曲面内的总电荷，而另一方面，則等于在它以外的总电荷反号。因此，这个曲面两边的电荷之和为零。

現在我們来研究有負的恒定曲率的空間的几何。从(11-121)我們知道，假如 a^2 是負的，即 a 是虛数，那么，λ 就是負的。因此，对于有負曲率的空間的所有公式，只須用 ia 代 a，就立即可以从前面的公式得出。換句話說，有負曲率的空間的几何，在数学上，可作为在一个半徑为虛数的四度假球上的几何。

因此，常数 λ 現在等于

$$\lambda=-\frac{1}{a^2},\qquad(11\text{-}125)$$

有負曲率的空間中的綫元在 r, θ, φ, 坐标中有下面的形式:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2), \qquad (11\text{-}126)$$

式中, r 可以取从 0 到 ∞ 之間的所有的値。圓的周長与半徑之比現在大于 2π。假如我們按照 $r = a\,\mathrm{sh}\chi$(χ 从 0 到∞)引用坐标 χ, 我們就得到与(11-123)相应的 dl^2 的表示式

$$dl^2 = a^2\{d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\}. \qquad (11\text{-}127)$$

球的面积現在等于 $4\pi a^2\,\mathrm{sh}^2\chi$, 当我們从原点移开时($\chi$ 因之增加), 这个面积将无限制地增加。有負曲率的空間的体积显然是无限的。

習 題

將綫元(11-122)变換成这样的形式, 在这个形式中, 綫元与其歐基里德表示式成比例。

解 將

$$r = \frac{r_1}{1+\frac{r_1^2}{4a^2}}$$

代入, 得到

$$dl^2 = \left(1+\frac{r_1^2}{4a^2}\right)^{-2}(dr_1^2 + r_1^2\,d\theta^2 + r_1^2\sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

§ 11-14. 在封閉的各向同性模型內的空間-时間度規

为了进行研究空間-时間的各向同性的度規[①], 首先我們必須选定我們的参考系統。最便利的参考系統是这样的一个参考系統, 它在空間的每一点随着在該点的物質一齐运动。我們可以說, 这个参考系統恰恰就是充滿空間的物質; 根据定义, 物質在这个参考系統中的速度处处都为零("固有"参考系統)。显而易見, 参考系統的这种选擇对于各向同性的模型是合理的; 作任何其他的选

① 我們在此所討論的引力方程的解, 以及下节所討論的引力方程的解是由 A. 佛里德曼在 1922 年首先得出的。

擇时，物体速度的方向就造成空間的不同方向在外表上的不等价。时間的坐标应当象上节开始所說的那样选擇，即使得在每一瞬間，度規对整个空間都是一样的。

由于所有方向完全等值，度規張量的分量 $g_{0\alpha}$ 在我們所选擇的参考系統內等于零。事实上，三个分量 $g_{0\alpha}$ 所以当作一个三度矢量的分量，假如它們不为零，那么，不同的方向就不等价了。因此 ds^2 应当有 $ds^2=-g_{00}\,dx_0^2-dl^2$ 的形式。分量 g_{00} 在这里仅仅是 x^0 的函数。因此，我們总能够这样选擇时間坐标，使 g_{00} 化为 $-c^2$。用 τ 表示这样选擇的时間坐标，我們得到

$$ds^2=c^2\,d\tau^2-dl^2. \qquad (11\text{-}128)$$

这个时間 τ 显然是在空間的每一点的固有时。

我們从研究正曲率空間开始；从現在起，为簡單起見，我們称引力方程在这种空間中的解为"封閉模型"。对于 dl，我們用表示式(11-123)，式中的"矢徑" a 一般来說是时間的函数。因此，我們将 ds^2 写成

$$ds^2=c^2\,d\tau^2-a^2(\tau)\{d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\cdot d\varphi^2)\}. \qquad (11\text{-}129)$$

函数 $a(\tau)$ 为引力場的方程所决定。为了解这些方程，用由关系式

$$c\,d\tau=a\,d\eta \qquad (11\text{-}130)$$

定义的 η 来代替时間是便利的。这时，ds^2 可以写成

$$ds^2=a^2(\eta)\{d\eta^2-d\chi^2-\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\cdot d\varphi^2)\}. \qquad (11\text{-}131)$$

要建立場方程，应从計算張量 R_{ik} 的分量开始(坐标 x^0, x^1, x^2, x^3 是 $\eta, \chi, \theta, \varphi$)。从对称性的考慮，我們預先断定，分量 $R_{0\alpha}$ 恒等于零。此外，从 Γ^i_{kl} 諸量的値，我們看出形式如 Γ^α_{00} 和 $\Gamma^0_{0\alpha}$ 的分量必定为零(这是不难証明的)。因此，在 R_{00} 的表示式中，只余下下面的一些项：

$$R_{00}=-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\ln\sqrt{-g}-\Gamma^\alpha_{0\beta}\Gamma^\beta_{0\alpha}+\frac{\partial\Gamma^0_{00}}{\partial\eta}.$$

为了簡化 $R_{\alpha\beta}$ 的計算，我們注意，既然 $g_{0\alpha}=0$，那么，三度張量 $\gamma_{\alpha\beta}$ 的分量就与分量 $g_{\alpha\beta}$ 重合。因此，将那些只含有 $g_{\alpha\beta}$ 的項从 $R_{\alpha\beta}$ 中分开，我們得到三度張量 $P_{\alpha\beta}$ 的分量。因此，我們求得

$$R_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}+\frac{\partial\Gamma^0_{\alpha\beta}}{\partial\eta}+\Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial\eta}-\Gamma^0_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\beta0}-\Gamma^0_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha0}.$$

利用(11-131)式中的度規張量的分量的值

$$g_{00}=-a^2,\ g_{11}=a^2,\ g_{22}=a^2\sin^2\chi,\ g_{33}=a^2\sin^2\chi\sin^2\theta.$$

我們从 Γ^i_{kl} 計算我們所要的量：

$$\Gamma^0_{00}=\frac{\dot{a}}{a},\ \Gamma^0_{\alpha\beta}=\frac{\dot{a}}{a^3}g_{\alpha\beta},\ \Gamma^\alpha_{0\beta}=\frac{\dot{a}}{a}\delta^\alpha_\beta$$

(点表示对于 η 的微分)。按照(11-118)和(11-121)，張量 $P_{\alpha\beta}$ 等于

$$P_{\alpha\beta}=\frac{2}{a^2}g_{\alpha\beta}.$$

最后，利用所有这些式子，經过簡單計算，得到

$$R^0_0-\frac{1}{2}R=-\frac{3}{a^4}(\dot{a}^2+a^2).$$

应当使它等于 $\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0$；既然在我們所选擇的参考系統中，物質是靜止的，那么，$u^\alpha=0$, $u^0=1/a$，于是从(11-28)式得到 $T^0_0=-\varepsilon$ (ε 是物質的能量密度)。

因此，我們得到下面的方程①：

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon=\frac{3}{a^4}(\dot{a}^2+a^2). \qquad (11\text{-}132)$$

这里出現了两个未知函数 ε 和 a；因此，我們必須还要找到另外一个方程。为此，我們选擇方程 $T^i_{0;i}=0$ 是便利的(用来代替場方程的空間分量)，这个方程是四个方程(11-77)之中的一个，如我們所知道的，它是包含在引力方程之内的。这个方程也可利用热力学关系用下面的方法直接导出。

① 我們决不研究帶有所謂宇宙常数的方程，因为現在已經最后闡明了，引力方程的这种变形是没有任何物理基础的。

在場方程中应用能量-冲量張量的表示式(11-28)时，我們就省略了所有导致熵增加的能量散失过程。这个省略在这里当然是完全合理的，因为由于能量的散失而应該加到 T_i^k 上的一些补助項与包含物質的物体的靜止能的能量密度 ε 数比較是微不足道的。

因此，在求場方程时，我們可以将总熵当作是不变的。現在我們来应用熟知的热力学中的关系式 $d\mathscr{E}=TdS-pdV$，此处的 $\mathscr{E},S,V$ 是体系的能量，熵与体积，而 p,T 則是它的压力与溫度。在熵不变的情况下，我們簡單地有 $d\mathscr{E}=-pdV$。引用能量密度 $\varepsilon=\mathscr{E}/V$，我們很容易求出

$$d\varepsilon=-(\varepsilon+p)\frac{dV}{V}.$$

按照(11-124)，空間的体积 V 是与曲率半徑 a 的立方成比例的。因此 $dV/V=3da/a=3d(\ln a)$，于是我們可以写

$$-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon+p}=3d(\ln a),$$

取积分則得

$$3\ln a=-\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+\text{常数}\tag{11-133}$$

(积分的下限是常数)[1]。

假如我們知道 ε 与 p 的关系(物态方程)，那么，方程(11-133)決定 ε 作为 a 的函数。这时，从(11-132)，我們可以决定 η 如下：

$$\eta=\pm\int\frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\varepsilon a^2-1}}.\tag{11-134}$$

方程(11-133)和(11-134)以普遍的形式解决了确定在封閉的各向同性模型內的度規的問題。

假如物質在空間是以不連續的宏观物体的形式分布的，那么，

---

[1] 我們注意，方程(11-133)与在§11-7的習題4中将方程 $T_{i;k}^k=0$ 在"固有"参考系統中积分，所得的方程(8)相合。

为了計算它所产生的引力場，我們可以将这些物体当作有一定質量的質点来处理，而不注意它們的一切内部构造。如果認为物体的速度比光速小很多，我們可以簡單地設 $\varepsilon=\mu c^2$，此处的 μ 是單位体积内的物体的質量之和。根据同样的道理，构成这些物体的"气体"的压力比起 ε 来是非常小的，因而可以略去不計（按照我們所說的，在物体内部的压力与所考慮的問題无关）。对于在空間的輻射，其能量相对地說也是很小的，因此，輻射能和輻射压力也可以略去不計。

在(11-133)中使 $\varepsilon=\mu c^2$, $p=0$，并且进行积分，則得到

$$\mu a^3=\text{常数}. \tag{11-135}$$

这个方程也可以直接写出，因为它不过表示这个事实，即在整个空間内的物体的質量之和保持不变，正如在所考慮的情形下所应該的（显而易見 $M/2\pi^2=$ 常数，其中 $M=\mu V$ 是一个体积为 $V=2\pi^2a^3$ 的空間内的总質量）。将(11-135)代入(11-134)内，进行积分，我們便得到

$$a=a_0(1-\cos\eta), \tag{11-136}$$

式中，$a_0=2kM/3\pi c^2$ 是一个常数。最后，对于 τ 和 η 的关系，我們从(11-130)求得

$$\tau=\frac{a_0}{c}(\eta-\sin\eta). \tag{11-137}$$

方程(11-136)，(11-137)决定以参数形式表示的函数 $a(\tau)$；这个关系所描写的曲綫是一个擺綫。

当 $\eta=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ 时，a 消失，而 μ 則变为无穷大。但是当 $\mu\to\infty$ 时，压力也很大，因此为了研究在上面所定的 η 值的附近的度規，我們必須考慮相反的極限情形，即尽可能大的压力的情形（对于給定的能量密度来說）。在 § 4-10 中我們已經看出，最大压力等于 $p=\varepsilon/3$［見(4-66)式］。将它代入公式(11-133)，則

得到

$$\varepsilon a^4 = \text{常数}. \tag{11-138}$$

在这以后,(11-134)和(11-130)导致下面的关系:

$$a = a_0' \sin\eta,\ \tau = \frac{a_0'}{c}(1-\cos\eta), \tag{11-139}$$

其中,常数 a_0' 与(11-138)式的常数有一定的关系。既然这个解只对于很小的 a 才有意义,那么,我們立即能够写出与它相应的近似公式(在 $\eta \ll 1$ 的情况下,将它展为級数而得到):

$$a = \text{常数}\sqrt{\tau}. \tag{11-140}$$

假如 τ 的符号变了,那么,(11-139)式中的 a 变为虛数,而它的平方为負。这时,(11-129)式中的所有四个分量 g_{ik} 应該都是負的,而行列式 g 則是正的。但是,这样的度規沒有物理意义(见第274頁)。这就是說,对于上面所給的 η 的値,度規实际上有奇异点。因此,我們必須只考慮 η 在 0 到 2π 这个区間(或者,从 2π 到 4π 的区間等等)之中的値,而超出这个区間边界的度規的解析开拓沒有物理意义。

§11-15. 在开的各向同性模型內的空間-时間度規

用与上节完全相似的方法就可得到有負曲率的各向同性的空間的相应的解("开模型")。代替(11-129),現在我們有

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 - a^2(\tau)\{d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\}. \tag{11-141}$$

再次引用变数 η 来代替 τ,而 η 与 τ 的关系是 $cd\tau = ad\eta$;这时,我們得到

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - \mathrm{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)\}. \tag{11-142}$$

在(11-131)式中,用 $i\eta, i\chi, ia$ 分别代替 η, χ, a,就能形式地得到上式。因此,用上面的替換在(11-132)和(11-133)兩个方程內,我們也能直接得到場方程。这时,方程(11-133)保留它的原来形

式：

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon+p} + \text{常数}, \tag{11-143}$$

而代替(11-132)，我們有

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(\dot{a}^2 - a^2). \tag{11-144}$$

与此相应，代替(11-134)，我們求得

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\varepsilon a^2 + 1}}. \tag{11-145}$$

我們先考虑压力小的情形。使 $p=0, \varepsilon=\mu c^2$，我們得到下面的最后公式：

$$a = a_0(\coth \eta - 1),\ \tau = \frac{a_0}{c}(\mathrm{sh}\ \eta - \eta),$$
$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_0. \tag{11-146}$$

前两个方程以参数形式决定了函数 $a(\tau)$。

当 $\eta=0$ 时，曲率半徑 $a(\eta)$ 为零，而 μ 則变为无穷大[(11-145)式中的积分常数是这样选择的，使 $\tau=0$ 同这个値对应]。与(11-135)—(11-137)各解不同，此处的 η 只有一个値。在 $\eta=0$ 的附近，我們的解不能应用，而我們又必須化为 $p=\varepsilon/3$ 的情形。从(11-143)式，我們依然得到

$$\varepsilon a^4 = \text{常数}, \tag{11-147}$$

而对于 a 与 τ 的关系，我們求得

$$a = a_0' \ \mathrm{sh}\ \eta,\quad \tau = \frac{a_0'}{c}(\coth \eta - 1).$$

只有对于小的 η，这个解才有意义，在这种情形下，我們又有

$$a = \text{常数}\sqrt{\tau}. \tag{11-148}$$

因此，在所考虑的情形下，度規在 $\eta=0$ 时有一个奇异点；因此我

們必須或者仅在 $\eta>0$ 时，或者仅在 $\eta<0$ 时，考虑所有的函数。

对于 $\eta>0$，曲率半徑随着 τ 的增加而單調地增加。我們着重指出，曲率半徑的增加导致空間内所有的距离的增加，从空間距离元(11-127)与 a 成比例这一事实就可以立卽看出这一点了。它导出这样一个結果，卽在这样的空間中，各物体彼此“跑开”。假如有一个观察者，坐在这些物体中的一个物体上面，在他看来，就好象所有其余物体都沿着半徑方向离开他而去[1]。

最后，所研究的解相应于空間的曲率半徑无限大的極限情形是平坦空間模型，卽欧基里德空間模型。在这样的空間-时間中的間隔 ds^2 可以写为

$$ds^2=c^2\,d\tau^2-b^2(\tau)(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{11-149}$$

(我們选擇了“笛卡兒”坐标 x, y, z 作为空間坐标)。空間距离元中的时間因子显然不改变空間度規的欧基里德性，因为对于一个給定的 τ，这个因子是一个常数；用簡單的坐标变换就可以使之为 1。用与上一节相似的計算，我們导出下面的結果：

$$\frac{8\pi k}{c^2}\varepsilon=\frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{d\tau}\right)^2,\quad 3\ln b=-\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+\text{常数}.$$

对于小压力的情形，我們求得

$$\mu b^3=\text{常数},\quad b=\text{常数}\ \tau^{2/3}. \tag{11-150}$$

对于小的 τ，我們又必須考虑 $p=\varepsilon/3$ 的情形，对于这种情形，我們求得

$$\varepsilon b^4=\text{常数},\quad b=\text{常数}\sqrt{\tau}. \tag{11-151}$$

因此，在这种情形下，度規也有一个奇异点($\tau=0$)。

所有我們考虑的各向同性的空間模型表現出有一个共同的特

[1] 为了得到物体彼此相互“跑开”的結論，物体直接的作用必須是足够弱的；更准确一些說，相互作用的势能，必須比它們分离运动的动能小很多(对分离得足够远的物体，这个条件总是滿足的)。在相反的情形下，物体相互的距离基本上由它們的相互作用决定；因此，例如，分立的宏观物体的綫度应当保持不变。

性——它們的度規有奇异点。然而必須注意，只有在更詳尽地研究了各向异性的普遍情形的場方程以后，才能回答这个問題，即到底这些解的这个特性是不是各向同性模型的特殊性質，这个特性对于实在的情形并不成立，因为实际上，空間的各向同性仅仅是近似的。

在此，我們关于热力学在广义相对論中应用的結果說一番話。

在§11-9中，我們看出在广义相对論中的四度总冲量守恒定律具有一个恒等式的性質。其中可注意的是，整个空間中的四度总冲量 P^i 为零。这可以直接从四度冲量的积分表示式

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha}\, df_\alpha \tag{11-88}$$

推出。事实上，在一个有限的模型中，每一个封閉曲面的两边都包圍空間的一个有限区域。因此，我們所写的积分等于包含在曲面一边的空間內的四度总冲量，而同时也等于包含在曲面另一边的空間內的四度总冲量反号。因此，从公式(11-85)計算出来的整个空間內的四度总冲量等于零。

因此，从(11-85)决定的整个空間的四度总冲量在实質上是沒有意义的，因为与之相应的守恒定律退化为毫无內容的恒等式 $0=0$。

在非相对論的热力学中，每一个閉合系的熵單調地增加，經过一个足够長的时間間隔以后，它达到与热力学的平衡状态相对应的最大值。这个值就是熵在系統的冲量和能量为給定的情况下可能有的最大值。

在相对論的热力学中，一个閉合系的熵的單調增加定律，象上面一样，仍然有效。然而，由于前面所說过的守恒定律的奇特性質，熵在增加的过程中对于一定的冲量和能量将最后取得它的最

大値这一句話，当应用到整个宇宙时就失去了意义。因此，宇宙的熵总在增加，然而宇宙不会达到任何具有最大的熵的平衡状态。

習　題

将在开模型內的間隔 ds 在大 τ 的情形下变換为中心对称形式(11-49)。

解：当 $\eta\gg1$ 时，从(11-146)可得 $a\cong c\tau$，因此，間隔(11-141)取下面的形式：

$$ds^2=c^2\,d\tau^2-c^2\tau^2\{d\chi^2+\text{sh}^2\,\chi(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)\}.$$

我們按照下面的关系引用新坐标 r：

$$r=c\tau\,\text{sh}\,\chi,$$

于是，$d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2$ 的系数化为 r^2。此外，写出

$$c^2(d\tau^2-\tau^2\,d\chi^2)=\frac{(c^2\tau\,d\tau+r\,dr)^2}{c^2\tau^2+r^2}-dr^2,$$

我們便得到

$$\frac{c^2\,d\tau+r\,dr}{\sqrt{c^2\tau^2+r^2}}=c\,dt,$$

由此可得

$$t=\sqrt{\tau^2+\frac{r^2}{c^2}}=r\,\text{ch}\,\chi.$$

因此，当变数为 r,θ,φ,t 时，間隔取下面的形式：

$$ds^2=c^2\,dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2).$$

这个結果表明，对于大的 τ，开模型的度規在一級近似中，仍旧是伽利略度規。然而在参考系統 r,θ,φ,t 中，物質不是靜止的，它的分布也不是均匀的；这时，物質的分布和运动对于被选擇为空間坐标原点的空間一任意点是中心对称的。在系統 χ,θ,φ,τ 中，每个給定質点对应于 χ,θ,φ 的一定的恒定值。因此，質点的徑速度 v 在系統 r,θ,φ,t 中等于

$$v=\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_\chi=\text{ch}\,\chi,$$

或者 $v=\frac{r}{t}$。它隨距离而增加，并与 r 成比例。为了决定物質的分布密度，我們注意在系統 χ,θ,φ 中，在一个"厚度"为 $d\chi$ 的球壳內所包括的物質的量为常数 $\text{sh}^2\chi d\chi$。但是 $\text{sh}^2\chi\,d\chi=\frac{ctr^2\,dr}{(c^2t^2-r^2)^2}$，除以球壳的体积 $4\pi r^2\,dr$（在坐标 r,θ,φ 中），我們找出物質的分布为

$$常数\frac{t}{(c^2t^2-r^2)^2}.$$

所有的結果都是在 $\eta\gg1$ 的假設下求出的，因而它們都不能应用到 r 接近于 ct 的情形（对于小的 $ct-r$，τ 也是小的）。

§ 11-16. 光的傳播

我們来研究一条光綫在各向同性空間中的傳播。为了这个目的，最簡便的方法是用这个情况，即沿光信号傳播的世界綫，間隔 $ds=0$。我們以光的出發点作为坐标 χ, θ, φ 的原点。从对称性的考虑，显而易見，光綫是沿着半徑傳播的，即沿着 $\theta=$ 常数，$\varphi=$ 常数的綫傳播的。与此相应，我們在（11-131）或（11-142）中命 $d\theta=d\varphi=0$，就得到 $ds^2=a^2(d\eta^2-d\chi^2)$。命它等于零，我們得到 $d\eta=\pm d\chi$，积分以后，得到

$$\chi=\pm\eta+\text{常数}. \tag{11-152}$$

η 前面的正号应用到从坐标原点發出的光綫，而負号則应用到向原点傳播的光綫。这个形式的方程（11-152）既可应用到开模型，也可以应用到封閉模型。借助于上节各公式，我們能够由此用时間来表示傳播的光綫上的位置。

在开模型中，一条光綫从它的傳播路程的某一点出發，离开这一点越来越远。在封閉模型中，一条光綫从起始点出發，最后可能到达空間的"共軛極"(这与 χ 从 0 变到 π 相对应)；在以后的傳播中，光綫开始向起始点接近。光綫繞着空間环行一周而又回到起始点的一个循环应該与 χ 从 0 变到 2π 相对应。从（11-152），我們看到，这时 η 也必須变化 2π，然而这是不可能的(光在与 $\eta=0$ 对应的一瞬間出發的情形除外)。因此一条光綫在"繞空間"一周后不能回到出發点。

一条趋向观察点(坐标原点)傳播的光綫，与 η 前面有負号的方程（11-152）相对应。假如光綫到达这一点的一瞬間是 $\tau(\eta_0)$，那么，当 $\eta=\eta_0$ 时，我們必定有 $\chi=0$，所以这样的光綫的傳播方程是

$$\chi=\eta_0-\eta. \tag{11-153}$$

由此可見，对于一个位于 $\chi=0$ 的点的观察者，只有那些从离

不超过 $\chi=\eta_0$ 的点出發的光綫，才能在 $\tau(\eta_0)$ 瞬間到达观察者

这个結果，对开的和封閉的模型都能应用，是很重要的。我們看出，在时間 $\tau(\eta)$ 的每一瞬間，在空間每一个給定点，不是整个空間都呈露在物理观察之下，只有与 $\chi\leqslant\eta$ 相应的那一部分才可能被观察到。用数学的观点来看，空間的可見的区域是四度空間被光錐所切的截面。这个截面无論对开的模型或封閉的模型都是有限的（在开模型中的无限大的截面是被超曲面 $\tau=$ 常数所切的截面，这个截面与这个空間相对应，在这个空間中所有的点在同一瞬間 τ 被观察到的）。在这个意义上，开模型与封閉模型之間的差别并不如初見之下所想的那样大。

观察者在一定的瞬間所观察到的区域离他愈远，与之相应的瞬間就愈早。我們来望一个球面，这个球面是这些点的几何軌迹，如果光从这些点在 $\tau(\eta-\chi)$ 瞬間發出，則在 $\tau(\eta)$ 瞬間在原点被观察到。这个曲面的面积是 $4\pi a^2(\eta-\chi)\sin^2\chi$（在封閉模型中）或 $4\pi a^2(\eta-\chi)\operatorname{sh}^2\chi$（在开模型中）。当它离开观察者时，"可見球"的面积首先从零（当 $\chi=0$ 时）增加以后达到一个最大值，在此以后又减小，而当 $\chi=\eta$ 时又回到零，[此处 $a(\eta-\chi)=a(0)=0$]。这就表明，光錐所割的截面不只是有限的，而且是封閉的。它好象是在与观察者相共軛的点封閉；在这一点 $\varepsilon\to\infty$。

在开模型中，所观察到的物質的总量等于

$$M_{\text{观察}}=4\pi\int\limits_0^\eta \mu a^3\operatorname{sh}^2\chi\cdot d\chi.$$

将(11-146)中的 μa^3 代入，我們得到

$$M_{\text{观察}}=\frac{3c^2a_0}{2k}(\operatorname{sh}\eta\operatorname{ch}\eta-\eta).$$

当 $\eta\to\infty$ 时，这个量无限制地增加。在封閉模型內，$M_{\text{观察}}$ 的增加自然为总質量 M 所限制。

現在讓我們考慮光在各向同性的空間中傳播时的頻率变化。为此，我們首先指出下面的事实。設在空間的某一点有两个事件發生，这两个事件的时間間隔是 $d\tau=\frac{1}{c}a(\eta)\,d\eta$。假如在这两个事件發生的两个瞬間，發出两个光信号，而在空間的另一点被观察到，那么，在它們被观察到的两瞬間，有一个与 η 的变动 $d\eta$ 相应的时間間隔，这个变动 $d\eta$ 与在出發点一样。直接从方程(11-152)可以推出这个結果。按照方程（11-152），η 在光綫从一点傳播到另一点期間的变化仅与这些点的坐标 χ 的差值有关。但是，旣然在傳播期間，曲率半徑改变了，那么，發出信号的瞬間与观察到它們的瞬間的时間間隔 τ 就不同了；这些間隔之比等于相应的 a 的值之比。

从上面所說的可以断定，例如，用世界时間来测量的光的振动周期也沿着光綫改变，并与 a 成比例。光的頻率显然将与 a 成反比。因此，在光綫傳播期間，沿着它的路徑，我們有

$$\omega a=\text{常数}. \tag{11-154}$$

假設在 $\tau(\eta)$ 瞬間我們观察从一个光源發出的光，这个光源位于相应于坐标 χ 的一个确定值的距离上。按照(11-152)式，發射出这个光的一瞬間是 $\tau(\eta-\chi)$。假如 ω_0 是光在發射瞬間的頻率，那么，按照(11-154)，我們所观察到的光的頻率是

$$\omega=\omega_0\frac{a(\eta-\chi)}{a(\eta)}. \tag{11-155}$$

由于函数 $a(\eta)$ 的單調增加，我們有 $\omega<\omega_0$，亦即光頻率将減小。这就是說，当我們观察向我們射来的光譜时，与在普通情形下同样物体的光譜相比較，所有它的光譜綫必定移向紅色的一边。这个現象在本質上是物体彼此“跑开”的多普勒效应。

測得的紅移的大小（例如用移动了的頻率与沒有移动的頻率之比 ω/ω_0 来測量）对于一定的观察时間来說，与到被观察的光源

所在处的距离有关[在(11-155)中，出現了光源的坐标 χ]。当距离不太大时，我們可以将 $a(\eta-\chi)$ 展为 χ 的幂級数，但只取前两项：

$$\frac{\omega}{\omega_0}=1-\chi\frac{\dot{a}(\eta)}{a(\eta)}.$$

(一点表示对 η 的微分)。此外，我們指出，乘积 $\chi a(\eta)$ 在此恰恰是到被观察的光源的距离 l。事实上，“徑向”綫元的長度等于 $dl=$ $=a\,d\chi$；在积分这个关系式时，就發生一个問題，即这个距离怎样用物理观察来决定。在求这个距离时，我們必須在不同的瞬間在积分路綫的不同点上取 a 的值（$\eta=$常数时的积分相应于同时观察沿路綫上所有的点，这在物理上是不能实現的）。但是对于“小的”距离，我們可以略去 a 沿积分路綫的变化，而簡單地写 $l=a\chi$，其中 a 的值是在观察的一瞬間取的。

結果，我們求得頻率改变的相对量如下：

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=-\alpha l,\tag{11-156}$$

此处我們引用了符号

$$\alpha=\frac{\dot{a}(\eta)}{a^2(\eta)}.\tag{11-157}$$

l 前面的系数 α 是一个常数(对于一定的观察瞬間)。因此光譜綫的相对移动应当与到被观察的光源的距离成比例。

将紅移作为多普勒效应的結果，我們可以决定物体离开观察者的速度。写出 $(\omega-\omega_0)/\omega_0=-v/c$，并与(11-156)相比較，我們便有

$$v=\alpha cl\tag{11-158}$$

$\left(\text{直接計算导数 } v=\frac{d(a\chi)}{d\tau}\text{，也可以得到这个公式}\right)$。

假如我們要将(11-158)用实驗数据来修正，我們得到系数 α 的值是

$$\alpha = 5.6 \times 10^{-28} \text{ 厘米}^{-1}. \tag{11-159}$$

这个值相应于"分离速度"在每一百万光年中增加 160 公里/秒。α 的正号表明 $\dot{a}(\eta)>0$; 在开模型中，这相应于 $\eta>0$, 而在封閉模型中，这相应于 $0<\eta<\pi$。

将 $\varepsilon=\mu c^2$ 和 $\alpha=\dot{a}/a^2$ 代入(11-144)式，对于开模型，我們得到关系式

$$\frac{1}{a^2}=\alpha^2-\frac{8\pi k}{3c^2}\mu. \tag{11-160}$$

将这个方程与等式

$$\alpha=\frac{\text{sh }\eta}{a(\text{ch }\eta-1)}=\frac{1}{a}\coth\frac{\eta}{2}$$

联合，我們得到

$$\text{ch }\frac{\eta}{2}=\alpha\sqrt{\frac{3c^2}{8\pi k\mu}}. \tag{11-161}$$

对于封閉模型，我們得到的不是(11-160)，而是

$$\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi k}{3c^2}\mu-\alpha^2. \tag{11-162}$$

比較(11-160)和(11-162)，我們看出，空間的曲率是負的或是正的，要看差量 $(8\pi k/3c^2)\mu-\alpha^2$ 是負的或是正的而定。对于 $\mu=\mu_k$, 这个差量为零，其中

$$\mu_k=\frac{3\alpha^2c^2}{8\pi k}=6\times10^{-28} \text{ 克/厘米}^3.$$

根据現代天文学的知識，物質在空間的平均密度只能作很不准确的估計，甚至連决定 $\mu-\mu_k$ 是正的还是負的都不可能。

讓我們在这里指出一些不等式，在給定 α 之值的情况下可以得到这些不等式。对于开模型，我們有

$$\alpha=\frac{\text{sh }\eta}{a_0(\coth\eta-1)^2},$$

因此，

$$c\tau=a_0(\text{sh }\eta-\eta)=\frac{\text{sh }\eta\,(\text{sh }\eta-\eta)}{\alpha(\text{ch }\eta-1)^2}.$$

既然 $0<\eta<\infty$, 那么我們应当有

$$\frac{2}{3\alpha}<c\tau<\frac{1}{\alpha}. \qquad (11\text{-}163)$$

同理,对于封閉模型,我們得到

$$c\tau=\frac{\sin\eta(\eta-\sin\eta)}{\alpha(1-\cos\eta)^2}$$

$a(\eta)$ 的增加相应于区間 $0<\eta<\pi$; 因此我們得到

$$0<c\tau<\frac{2}{3\alpha}. \qquad (11\text{-}164)$$

在这两种情形中, $c\tau<1/\alpha=2\times10^9$ 光年。

下面,我們决定光从光源到达观察者时的强度,光源到观察者的距离与坐标 χ 的一定的値相应。在观察点的光能通量密度,与球的面积成反比例,同以光源所在点为心并經过观察点作出的球的面积成比例; 在負曲率的空間中,球的面积等于 $4\pi a^2\,\mathrm{sh}^2\,\chi$。此外,光源在时間間隔 $d\tau=\frac{1}{c}a(\eta-\chi)\,d\eta$ 内所射出的光在时間間隔 $d\tau\frac{a(\eta)}{a(\eta-\chi)}=\frac{1}{c}a(\eta)\,d\eta$ 内将达到观察者所在之点。因为光的强度被定义为每單位时間的光能通量,所以在 I 內就出現了一个因子 $a(\eta-\chi)/a(\eta)$。最后,一个波包的能量与它的頻率成比例(見 § 7-9); 既然在光傳播期間,頻率依規律(11-154)而改变,因而这又一次影响到 I 中的因子 $a(\eta-\chi)/a(\eta)$。結果,我們得到强度的公式如下:

$$I=\text{常数}\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\,\mathrm{sh}^2\,\chi}. \qquad (11\text{-}165)$$

对于封閉模型,我們同样地得到

$$I=\text{常数}\frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\sin^2\chi}. \qquad (11\text{-}166)$$

这两个公式决定被观察物体的外表亮度与它的距离的关系(在絕对亮度一定的情况下)。对于小的 χ, 我們可以使 $a(\eta-\chi)\cong a(\eta)$,

这样，我們就有 $I\sim 1/a^2(\eta)\chi^2=1/l^2$，即是說，我們得到了光强度与距离的平方成反比的普通定律。

最后，讓我們考慮所謂物体的特征运动的問題。当說到物質的密度和运动时，我們总是了解它們为平均密度和平均运动；就特例言之，在我們所常用的参考系統中，平均运动的速度为零。物体的实在速度繞着这个平均值作振动。在时間的过程中，物体的特征运动速度是变化的。为了决定这个变化的規律，我們来考慮一个自由运动的物体，并且选擇軌道上的任意一点为坐标原点，那么，軌道将是徑向綫：$\theta=$常数，$\varphi=$常数。将 g^{ik} 的值代入以后，哈密頓-雅可畢方程(10-68)取以下的形式：

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2+m^2c^2a^2(\eta)=0. \qquad (11\text{-}167)$$

既然 χ 沒有出現在这个方程的系数內（就是說 χ 是一个循环坐标），那么，守恒定律 $\partial S/\partial\chi=$常数将是有效的。根据定义，运动物体的冲量 $p=\partial S/\partial l=\partial S/a\,\partial\chi$。因此，对于运动的物体，$pa$ 是常数：

$$pa=\text{常数}. \qquad (11\text{-}168)$$

按照

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

引用物体的特征运动速度 v，我們得到

$$\frac{va}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\text{常数}. \qquad (11\text{-}169)$$

速度随时間而变化的規律就为这些关系所决定。速度 v 随 a 的增加而單調地增加。